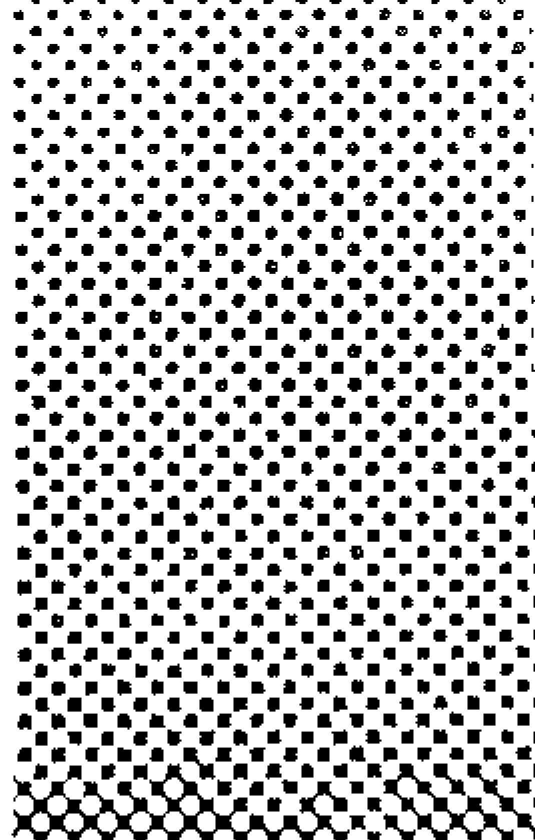
数学习题理论

SHUXUE XITI LILUN

·戴再平 著·

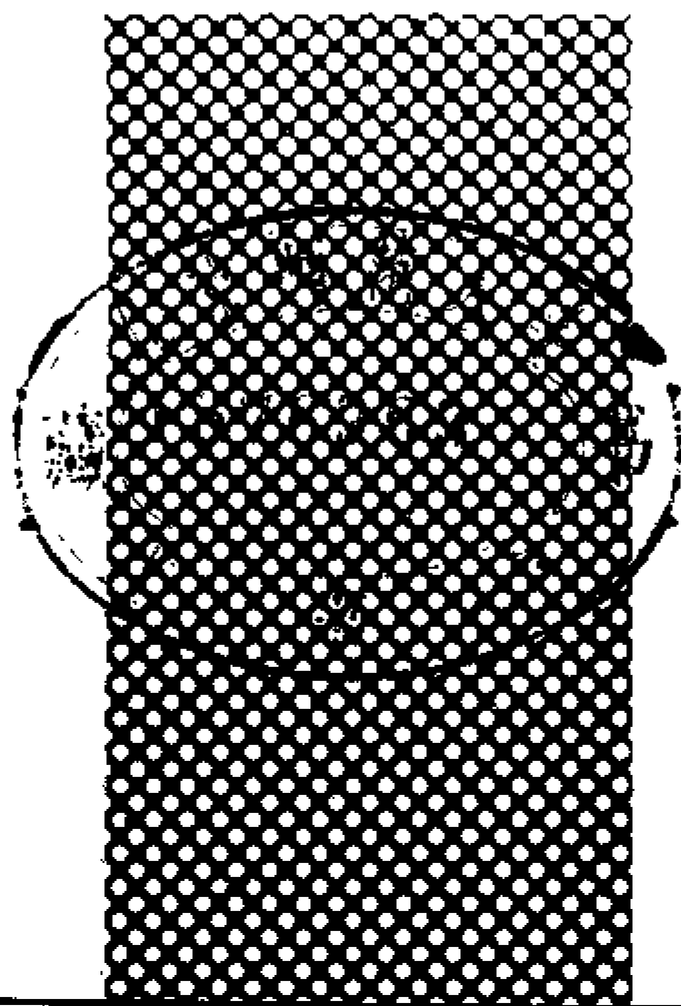
上海教育出版社



数学习题理论

·戴再平　著·

上海教育出版社



数学习题理论

戴再平著

上海教育出版社出版发行

(上海永福路123号)

各地新华书店经销 商务印书馆上海印刷厂印刷

开本 850×1156 1/32 印张 6.75 插页 5 字数 158,000

1991年3月第1版 1991年5月第1次印刷

印数 1—2,400本

ISBN 7-5320-2129-7/G·2068 定价：2.90元

自　序

对习题的广泛而深入的研究是当代中国数学教育的一大特色，但人们的注意力似乎集中于解法方面．其实对于一个数学教师来说，从数学习题的功能、结构、方法等理论问题上深入探讨，乃是提高素质和职业技能的更为重要的方面，即使是解法，掌握高层次的解题策略也比掌握低层次的具体解法意义更大．笔者深感，在我国丰富的解题实践基础上，对数学习题的有关理论问题进行反思，通过归纳、分析、批判等方法，形成系统的学问，这不仅是提高数学教师的理论水平和实践能力的迫切要求，也是数学教育理论从一般教育理论中分离出来，形成独立的科学体系的一种历史的必然．

本书反映了笔者自1982年以来就数学习题理论方面所进行的研究工作，这些工作的不尽的源泉是我国60万中学数学教师的辛勤劳动．本书的主要内容曾在浙江教育学院经过五年的教学实践的检验．笔者要特别感谢浙江教育学院对形成和出版本书的一贯的鼓励和支持．必须提到的是，本书第三章第四节是笔者与时承权副教授共同研究的成果；对于第五章的内容，章建雄副教授曾提供了不少精辟的见解和有益的建议．至于本书所引用的众多的成果，我们就恕难对有关的作者一一致谢了．

数学习题理论是一个新的概念，这个概念的内涵和外延目前尚未得到国内外专家的探讨，笔者深知目前所建立的理论框架是初步的，不完善的，但是形势的需要迫使我们不得不先作抛砖之

举."始生之物，其形必丑."我们热切地期待着同行和专家的斧正。

戴再平

1989年5月

目　录

第一章 引　论

数学习题理论(Mathematical Exercise Theory)是关于研究数学习题的功能、结构、方法等规律性知识的学问.

第一节　建立数学习题理论的必要性

数学,由于它具有广泛的应用价值、卓越的智力价值和深刻的文化价值,因此在基础教育中占有特殊重要的地位.在中学的数学教育中,主导的内容不是那些正在发展中的现代数学分支,而是在人类文化宝库中业已形成的数学思想、知识和方法.在数学教育活动中,"解题"是最基本的活动形式.无论是学生的数学概念的形成、数学命题的掌握、数学方法和技能技巧的获得,还是学生智力的培养和发展,都必须通过"解题"."解题"也是评价学生的知识和发展水平的主要手段.现代的中学数学课本都无例外地配置大量的例题和习题.余元庆认为:"习题是中学数学课本中的重要组成部分.习题配备得好不好,直接影响到学生学习质量的高低.许多优秀中学数学教师的教学质量所以高,一部分原因也是由于习题选择和处理得恰当."(«数学通报» 1980 年第 3 期第 6 页.)在某些情况下,解题训练的需要甚至决定了课程和课本内容的取舍,如欧几里得几何,虽然在科学发展上它是古老的,但是由于它的智力价值,能提供不同难易程度的智力训练的题目.因此尽管近百余年以来,从英国的大数学家西尔维斯特(J. J.Sylvester)、布尔巴基学派的创始人之一迪多内(J. A. Dieudonné),到某

些中国数学家都曾经主张在中学数学课程中摒弃欧几里得几何，但是迄今为止，我们仍然没有找到理想的代替物．欧几里得几何在目前我国的中学数学课程中依旧占有其重要的位置．

我国中学数学界普遍重视解题，特别是近十年来，在高考制度的引导下，解题方法的研究成果相当可观，其中相当一部分已初具理论形态，不少学者和教师，已经从解法的分类深入到解题策略和思维过程的探求．数学习题的一般理论，如数学习题的科学性、数学习题的编制、数学习题的错误分析、数学习题的评价、客观性习题等也有一定的发展．尤其是1978年恢复数学竞赛以后，对竞赛命题的研究推动了数学习题理论的发展．但是我们必须看到，也有相当一部分中学数学教师沉缅于解题之中，忘记了"解答数学的习题本身不是目的，而只是一种训练手段"（Л．M．弗里德曼），这种情况，其危害性正如柯朗（R. Courant）所说："数学的教学，逐渐流于无意义的单纯的演算习题的训练，固然，这可以发展形式演算的能力，但却无助于提高独立思考的能力．"我们甚至可以说，不能正确地对待解题，将学生的手脚束缚在题海之中，这是当前中学数学教学中亟待解决的问题．

再让我们来看几件事：

1．目前我国三十种以上的以中学数学教育为主要内容的报刊、杂志中，数学习题文章所占的比例最大．1980年，根据张友余编的《中国中等数学文摘》（陕西科学技术出版社1983年3月第1版）辑录的当年中学数学教育文献共2140条，到1985年，仅据28种中学数学专业期刊统计，发表的文章就有3625篇，如果加上其他散见于各种报刊、杂志、书籍之中的文章，则不下5000篇．在这大量的文献中有哪些数学习题理论方面的成果？有哪些数学习题的资料经过整理可以上升到理论？目前这类文章是寥寥无几．

2．在地区性甚至全国性的刊物、书籍和试题中不断出现错

题，屡批不绝；在不应出现成题的场合，如数学竞赛试题、高考和中考试题中的灵活题，屡次出现成题.这些现象与其说是有关人员的疏忽，还不如说是有关人员缺少评价习题科学性的理论和编制数学习题理论的指导.

3．人们都认识到，解题是数学教师的基本功，但是目前在高等师范院校的课程中，在教师的岗位培训中却缺乏对这种基本功的系统训练，教师只能从零散的解题实践中，逐渐地积累和形成，一旦在教学中需要对学生进行指导时，便感到自身理论上的不足.

从上述情况来看，对数学习题的功能、结构、方法等理论问题进行反思，通过归纳、分析、判断等方法，形成系统的数学习题理论，这不仅是提高数学教师的理论水平和实践能力的迫切需要，也是数学教育理论从一般教育理论中分离出来，形成独立的科学体系的一种历史的必然.

数学教育理论要成为一门独立的科学，就必须从本身的特点和实践经验出发，运用现代教学论、现代认知心理学、思维科学、系统科学等现代科学成果，通过科学的概括和整理，真正达到一种系统的、规律的、理性的认识.本书就是从"数学习题"这个领域，就有关的理论问题作出简要的叙述.

第二节　问题是数学的心脏

数学界曾经接受美国数学家哈尔莫斯(P. R. Halmos)的下述说法：数学究竟是由什么组成的？是公理？定理？证明？概念？定义？理论？公式？方式？诚然，没有这些组成部分，数学就不存在，这些都是数学的组成部分.但是，它们中的任何一个都不是数学的心脏，这个观点是站得住脚的，数学家存在的主要理由就是解题.因此，数学的真正的组成部分是问题和解.

按系统论的观点，若 S 代表某个主体，R 代表某个抽象或具体的系统的集合，则系统 (S, R) 中集合 R 称之"题系统"．如果主体接触 R 后认为其全部元素、性质及关系都是他知道的，就称 R 为稳定系统，否则便称为问题系统．问题系统以 R_a 表示．当求某个主体从 R 中确定他所不了解的元素、性质和关系时，集合 R 对该主体就变成了题．解题就是将问题系统 R_a 转变为稳定系统．

从历史上看，成书于公元一世纪前后的我国辉煌数学文献《九章算术》就是一本问题集，其中收集的方田、粟米、衰分、少广、商功、均输、盈不足、方程、句股九类共 246 个问题几乎反映了当时社会生活的各方面的实际问题，记载了世界上最先进的分数四则、比例算法及线性方程组的解法．我国南宋数学家秦九韶所著《数书九章》是又一部百科全书式的问题集，他将 81 个问题分成九类，其中包括对贾宪的"增乘开方法"（高次方程数值解法）的发展这样一些创造性工作，这些程序化的思想方法直至今日仍然是数学家进行研究工作吸取营养的源泉．吴文俊说过："中国古代创造了方程术、增乘开方法等构造性的方法，它的数学基本上是构造性的．作者从事几何机器证明的研究就是在中国古代数学的启发下提出问题并想出解决办法的．"（《复兴构造性的数学》，《数学进展》Vol. 14, No. 4）在西方，成书于公元前三世纪的欧几里得《原本》已把要求作出图形的命题和要求证明的命题分开，并开创了里程碑式的公理化工作．在演绎、算法这两种倾向交替地取得主导地位的西方数学发展过程中，积累了丰富的解题知识．通过中外数学家如刘徽、秦九韶、李善兰、笛卡儿、莱布尼兹、欧拉、高斯等人的工作，我们可以看到对解题的思维策略的探讨，始终是数学发展中的一条线索．欧拉应用了从有限过渡到无限，从有限次方程过渡到无限次方程的方法，求得了伯努利（Jacob Bernoulli）没能解决的级数的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},$$

迄今仍为人们所推崇，被认为是运用类比推理的典范. 笛卡尔在发明解析几何之后，进一步设想过一个包罗万象的解题方案：将任何种类的问题化归为数学问题；将任何数学问题化归为代数问题；将任何代数问题化归为方程求解. 如果我们看到，人们为了解决诸如费尔马大定理、希尔伯特二十三问题等这些著名问题的过程中对数学发展的推动，就可以清楚地认识到，本节开头所提到的哈尔莫斯的话是相当正确的.

不仅对于数学科学而且对于学校数学来说，问题也是她的心脏.当代最著名的数学教育家波利亚(G. Polya)强调指出："中学数学教学首要任务就是加强解题训练."(1961) 他还说过："掌握数学意味着什么呢？这就是说善于解题，不仅善于解一些标准的题，而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和有发明创造的题."但是解题毕竟是一种复杂的智力劳动，它是最富有创造性特征的人类活动. 对于一般意义下的问题解决(problem solving)，长期以来，刺激-反应派心理学家与认知派心理学家的见解存在着分歧，前者倾向于用尝试错误来解释问题解决，后者倾向于用顿悟来解释问题解决. 从本世纪 50 年代开始，现代认知心理学家，以纽威尔(A. Newell)与西蒙(H. A. Simon)为代表，吸收了前面两派心理学的有益成果，用信息加工观点来解释人的问题解决的过程，取得了一系列卓越的成果.在现代认知心理学关于问题解决的研究工作进展的鼓舞下，经过对新数学运动的得失成败的检讨，从 80 年代开始，"问题解决"已成为世界性的数学教育的一个热点，著名的美国全国数学教师联合会《行动的议事日程(An Agenda for action)》(1980)、英国的《科克柯罗夫特报告(Mathematics Counts)》(1982) 都把"问题解决"当作数学教育的中心任务.

什么是"问题解决"?数学教育中要解决什么样的问题，各国数学教育家理解上不尽一致，但他们的研究工作实际上包含了各种层次和形式的问题. 1988年在布达佩斯举行的第六次国际数学教育大会(ICME-6)，参加"问题解决的模式与应用"课题组讨论的代表有500名之多，他们认为应该对以下各种形式的问题加以识别:

1. 虚设的习题("dressed-up" exercise);
2. 进一步的习题("advancement" exercise);
3. 经典问题("classical" problems);
4. 新经典问题("neoclassical" problems);
5. 开放问题(open problems);
6. 探究题(investigations).

一些国家在"问题解决"的研究中，往往侧重于解决现实生活中的实际数学问题，和数学中的非常规问题，但是常规的、经典的问题的解决，仍然是大多数人关注的中心. 如上述美国《行动的议事日程》认为解决问题的含义是:

1. 问题解决包括数学应用于现实世界，包括为现时和将来出现的科学理论与实际服务，也包括解决拓广数学科学本身前沿的问题;

2. 问题解决从本质上来说是一种创造性的活动;

3. 问题解决能力的发展，其基础是虚心，是好奇和探究的态度，是进行试验和猜测的意向.

在美国报刊和研究文献中曾被广泛运用的一个例子是:"每辆军车可载士兵36名，现有1128名士兵要求被运送到训练基地，问需用军车多少辆?"如果学生得出带余数的商，或是干脆略去余数，就说明学生对问题的情景和未知数的性质一无所知.

日本数学教育家在"答案不是唯一确定"的数学问题的解决方

面作了不少开创性的研究，如泽田利夫的"无终结(open-end)问题"和能田伸彦的"开放处理(open approach)"法都是关于这方面的工作. 泽田利夫提出的一个例子是:"A, B, C 三人作掷石子游戏，结果如下图，这个游戏是以石子散落的距离小者为优胜. 请想一想如何用'数'来表示这个'散度'?"

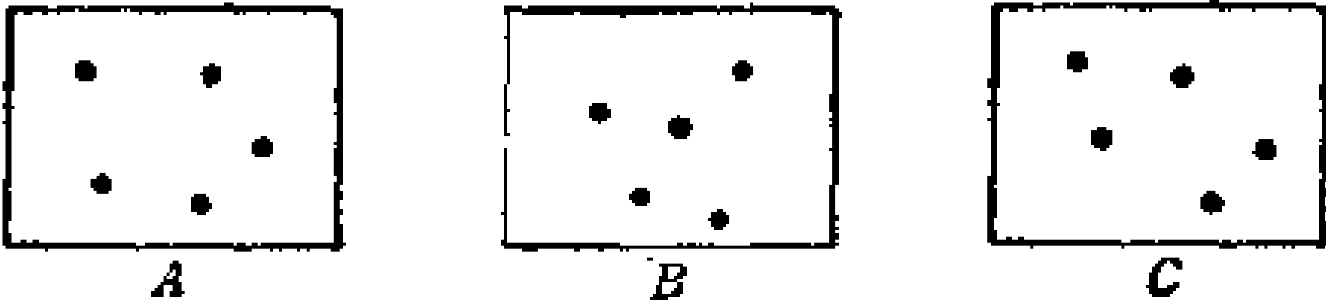


图 1-1

下面是学生考虑到的几种比较"散度"的方法

1. 多角形面积;
2. 多角形的周长;
3. 连结两点的最长线段;
4. 线段之和;
5. 从任意一点引向各点的长度之和;
6. 覆盖各点的圆的最小半径;
7. 由于坐标的导入而产生的平均差;
8. 标准差.

我国中学数学界近十年以来关于解题教学的研究，和上述国际上的"问题解决"的热潮在本质上是完全合拍的，而我国中学数学教学内容与不少国家相比较，有程度较深、理论严谨等特点，所以关于解题研究方面的深度和广度在世界上是可以和任何国家媲美的，1986--1988 连续三届国际数学奥林匹克竞赛中我国选手成绩出色，1985 年、1987 年上海师范大学和美国霍普金斯大学通过 SAT-M 测验进行的一项对比研究表明，中国学生的成绩都明显优

于美国学生①，这些都说明我国中学数学解题教学中蕴含着丰富而卓有成效的经验。但是，如何紧密地联系我国数学教育中发展变化的实际情况，不懈地追踪解题教学中涌现的新问题，从教育的眼光观照数学解题活动，把数学解题的功能、结构、方法的研究提高到理论层次上来，从而建立起能够指导实际教学工作的数学习题理论，这项任务是相当繁重的。

① 见《教育研究》1986年第11期《中国有丰富的数学人才资源》及1988年第6期《学生数学能力差异研究》两文。

第二章　数学习题的分类和功能

为熟悉和掌握教学计划、教学大纲对学生的要求，发展学生的智能的问题系统称为习题．以数学为内容，或者虽不以数学为内容，但必须运用数学知识或方法才能解决的习题称为数学习题．如数学课中教师提问的题、例题、练习题、测验题都是数学习题．

解数学习题就是要找到一种一般的数学原理用于习题的条件或条件的推论（中间结果），通过一定的程序得到习题所要求的答案．

第一节　数学习题的分类

数学习题可以按不同的标准加以分类．

一、按知识内容分类

将数学习题按知识内容的不同分为算术题、代数题、平面几何题、立体几何题、解析几何题和三角题等，这是一种最常用的分类方法．

按知识内容不同的分类可在不同的层次上进行，如代数题又可分为代数式、集合对应、函数、方程、不等式、复数、排列组合、二项式定理、数列等习题；解方程又可再分为解整式方程、分式方程、根式方程和超越方程等．

一个数学习题，如果所涉及的知识超出某一单元或学科，这样的习题称为综合题．综合题有利于培养学生综合、灵活运用知识来分析问题与解决问题的能力，有利于培养学生的广阔性、多向性

等思维品质，因此在教学中教师乐于采用这种题型，特别是在复习和能力考查中更是离不开数学综合题. 但是综合题必须体现知识的内在联系，要注意综合题与堆砌题的区别. 吕学礼于1985年就提出这种观点. 如

【例1】 钢杆 AB, BC 在 B 点铰接. $BO \perp AC$, $BO=1800\text{ mm}$, $\alpha_1=30°$, $\alpha_2=45°$. 因受外力作用，AB 被压短 0.69 mm, BC 被拉长 0.66 mm. 计算 B 点移动了多少. (图2-1)

此题是材料力学中遇到的实际问题，可以用解三角形的方法解答，也可以用解析几何的方法解答，这样的习题，既可培养学生的能力，又可使学生初步接触实际，是一个较好的综合题.（具体解法见《数学教学》1982年第2期吕学礼文）

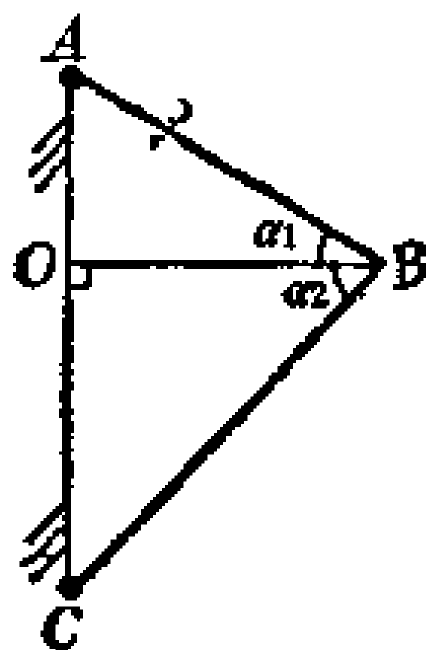


图 2-1

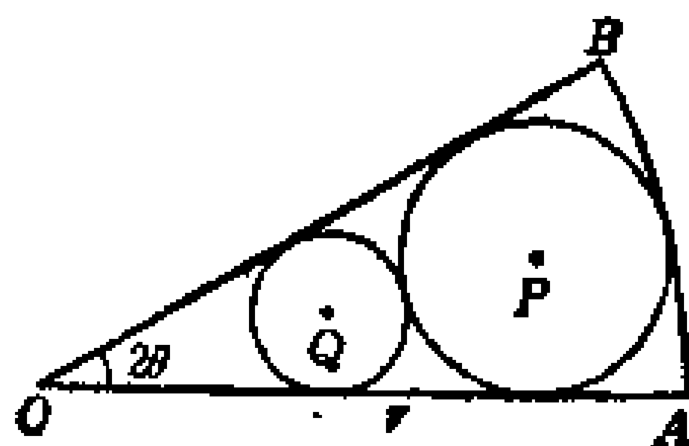


图 2-2

【例2】 在中心角是 2θ、半径是 r 的扇形 OAB 内作一内切圆 P，再在扇形内作一与扇形两半径相切并与圆 P 外切的小圆 Q，若 θ 使圆 Q 的面积最大，求出 $\sin\theta$.（图2-2）

此题融合了平面几何、三角、导数等多方面知识，也是一个较好的综合题.

【例3】 解方程 $ax^4+bx^2+c=0$. 其中系数 a, b, c 分别满足：

(1) $(0.2)^{\sqrt{a}}=0.008$;

(2) b 的相反数是方程

$\lg(2y+6)+\lg 5=3-\lg 2\frac{1}{2}$ 的根；

(3) c 是下列交集的元素：$\{c|2<c\leqslant 5\}\cap\{c|c^2-2c-8=0\}$.

此题实际上由四个问题组成，即由(1)求 a；由(2)求 b；由(3)求 c；然后在此基础上再解方程 $ax^4+bx^2+c=0$. 像这样把四个问题生硬地扯在一起，没有必然的内在联系，就不能说是真正的综合，只能说是单纯的堆砌. 如果用作考题，可能使做错前面一个小题的学生失去解出后面结果的机会，造成不必要的失分，难以考出这部分学生的实际水平. 所以堆砌题在教学中是应该避免的.

二、按形式分类

形式是数学习题的外部的特征，数学习题的形式和它的解法常常是有联系的，虽然这种联系不一定是必然的. 许莼舫将几何题按形式分为证明题、计算题、作图题和轨迹题四类，如果一个几何题可判明是作图题，一般要求按下列六个步骤去完成：

1．假设　记出题中所设的条件；

2．求作　说明要作的图必须具备上述各条件；

3．解析　假定这图已经作出，先绘一草图，必要时还需添置有关的线，研究图中各已知条件和未知条件之间的相互关系，借此决定所求的图应该用怎样的方法作出；

4．作法　以几何公法或基本作图法为依据，依次叙述作图的方法；

5．证明　证明用上述的方法作出的图和题中的所设条件一一符合；

6．讨论　就所设条件同图形间的关系加以探讨，说明在什么情形下无解，什么情形下有独解，什么情形下有多解或不定.

从上面这个例子，我们可以看到，按形式将数学习题加以分类，对于这个习题的解决是有帮助的.

Л. М. 弗里特曼、Е. Н. 杜列茨基、В. Я. 斯捷欣柯提出的三分法(1979)是按题的外在特征进行分类的一种比较完善的方法，根据这一方法，所有数学习题被分成三类：

第一类　求解题

在这类习题中，要求的是求出、寻找、识别某种未知数，并且未知数可能是量、关系式、某种对象、物体，它的位置或者形状等等。这一类习题包括：

1．计算各种表达式的值；

2．一个未知数的方程；

3．方程组；

4．解不等式；

5．文字计算题；

6．几何计算题；

7．求已知函数的特殊点和特殊区间。

第二类　证明题或说明题

在这类习题中，要求是证实某一个论断的正确性，或者检验它是真的还是假的，或者说明某一种现象、某一个事实为什么成立。这一类习题包括：

1．证明恒等式；

2．证明不等式；

3．几何的证明题；

4．确定几何图形的形状；

5．已知表达式或图形的性质，确定这个表达式或图形的方程；

6．证明表达式、图形或事件的某种性质(如存在性等)。

第三类　变换题或求作题

凡是在习题中要求变换某种表达式，要求化简它为其他的形

式，要求作出某一几何图形或者表达式满足给定的条件等等，都属于这一类．它包括：

1．化表达式为标准的形式；

2．化简各种表达式；

3．多项式的因式分解；

4．对表达式施行各种运算；

5．作由解析式表示的函数的图像；

6．根据一定的条件作出几何图形；

7．由已知的几何图形，作出经过某种变换所得到的几何图形．

三、要素分析分类法

数学习题是一个系统：$\{Y, O, P, Z\}$，其中系统的各要素分别是：Y 表示习题的条件；O 表示解题的依据；P 表示解题的方法；Z 表示习题的结论．分析四个要素中已知要素的多少，可将数学习题分为下列四类：(B.A. 奥加涅相、Ю. M. 柯里亚金、Г. Л. 卢坎金，1981)

1．标准性题　即四个要素都为已知的题．

【例 4】　求证 $\csc\alpha-\sin\alpha=\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\,\alpha$．

此题对于已经学过同角三角函数关系的高中一年级学生来说，Y：左边为$\csc\alpha-\sin\alpha$，右边为$\cos\alpha\mathrm{ctg}\,\alpha$；$O$：同角三角函数关系；$P$：化为 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$；Z：左边＝右边．这四个要素都是已知的，因此是一个标准性题．

2．训练性题　即四个要素中只有一个是学生所不知道的，而其余三个要素都是学生已经知道的题．

【例 5】　分解因式：$x^2-7x+12$．

此题对于学过用十字相乘法分解因式的学生来说，除了结论 Z 是未知的之外，其他三个要素 Y，O，P 都是已知的，因此是一

个训练性题.

3. 探索性题　即四个要素中有两个是学生所不知道的，而其余两个则为已知的题.

【例 6】　证明恒等式 $\sin 3x\sin^3 x+\cos 3x\cos^3 x=\cos^3 2x$.

此题对于学过和、差、倍、半角的三角函数关系以及三角函数的和差与积的互化公式的高中一年级学生来说，已知的是条件 Y 和结论 Z 这两个要素，其余两个要素 O, P 都是未知的，因此是一个探索性题.

4. 问题性题　即四个要素中仅有一个是学生已知的，其余三个都是学生所不知道的题.

【例 7】　四面体的截面可以是什么形状的图形？

此题除已知条件 Y 之外，其余各要素 O, P, Z 都是未知的，因此是问题性题.

【例 8】　给定一个形状为直角三角形的金属片，现在要剪出尽可能大的两个相等的圆片，问圆片的半径有多大？

此题初看可能认为已给出条件 Y 和结论 Z 这两个要素，因此以为是探索性题. 实际上，根据题中的叙述，将问题数学化，并非是一件轻而易举的事. 因为若设给定的直角三角形的两个直角边为 a, b，且有 $a\geqslant b$，那么两个等圆的放置方法将有如图 2-3 所示的三种. 所以题目的已知条件 Y 也并未直接给出，因此这是一个问题性题



图 2-3

通过要素分析，将数学习题分为四类，这对于教师掌握习题的难度是有好处的，因为习题的难度，由易到难的排列次序是：

标准性题——训练性题——探索性题——问题性题.

目前中学数学课本中的练习题分为三个层次，即"练习"、"习题"和"复习题"，一般说来，"练习"中适于安排标准性题和训练性题，"复习题"中适于安排探索性题和问题性题，"习题"则介于两者之间．当然，某个数学习题究竟属于哪一类，还要取决于学生的知识基础和解题经验．同一个数学习题对于不同的学生来说，可能属于不同的类型.

标准性题和训练性题，由于不存在未知要素或者仅有一个未知要素，通常具有定向的解题方法，所以我们也称为收敛性题；探索性题和问题性题，由于未知要素较多，通常不具有定向的解题方法，所以我们也称为发散性题．收敛性题常用于即时巩固学生的知识，以便强化学生的思维定势；而发散性题则常用于培养学生思维的灵活性，有助于发展学生的智力.

在解题的过程中，通常是先把问题性题转化为探索性题，再把探索性题转化为训练性题或标准性题，这就是从未知到已知的转化过程．当学生解决某个习题有困难时，教师就已知条件加以分析，或者提示解题的依据或方法，或者帮助学生析出结论，这实际上就是降低题目的难度层次，创造适合学生认知水平的教学情景．反之，教师也可以通过增加题目中未知要素的方法，来提高题目的难度，以加强对学生的思维训练．如"用十字相乘法分解因式：x^2-7x+6"，这是一道训练性题．若改为"给出整数 a 两个适当的数值，并用十字相乘法分别分解因式：x^2-7x+a"，这就是一道探索性题.

四、按开放性分类

凡是具有完备的条件和固定的答案的习题，我们称为封闭题；而答案不固定或者条件不完备的习题，我们称为开放题.

现行中学数学课本中的习题绝大多数都是封闭题．开放题是

在研究"问题解决"的热潮中出现的. 封闭题和开放题各有千秋,封闭题定向性强,有利于在不同条件下重复思维操作,是巩固推理技能和加深知识理解所必须;开放题则可以在不同的经验和能力水平的基础上,通过自己的观察,提出自己的解题思路,获得多种不同的解题方法. 封闭题多用于巩固知识,起到了同化作用;开放题在解题过程中要建立新的认知结构,起到了顺应作用.

【例 9】 试指出下列两个代数式的共同点:

$$12a^2b^2c; \quad 8a^3xy.$$

这是一个开放题. 笔者曾以此题和其他两个开放题(合起来记为 O 类题),又几个封闭题(记为 C 类题),在浙江省镇海县三所学校(学生来源有显著差异):(1)省重点中学,(2)镇集完全中学,(3)乡村初级中学 各取一个初三班级进行一次测试,结果如下[1]:

学校		(1)	(2)	(3)
答对率(%)	O类题	31	21	19
	C类题	81	49	51

上述数字表明:学生解答开放题的能力远较解答封闭题的能力差,如例 9,多数学生只能指出这两个式子都是单项式、整式、有理式,始终没有脱离这两个式子外形上的共同点,未能从另外的角度指出它们有公因式 $4a^2$,它们都是五次式等,表现出缺乏思维的灵活性、深刻性和细致性. 说明知识、技能的堆砌对学生的创造思维能力的发展没有必然的联系.

以岛田茂为首的一个日本数学教育学者小组,在 1971 年以后曾经对开放题进行了颇有特色的研究,这个小组的成员之一日本筑波大学教授能田伸彦认为,数学教育应向学生提供这样的开放

[1] 《中学数学教学培养创造思维能力刍议》一文. 《浙江教育学院学报》1984 年总二期.

题，它"能够让学生了解问题的主题材料，而问题并没有唯一正确的解答，因此就向学生提供了用他们所最喜欢的解决问题的方法的机会."[1]下面是该研究小组成员桥本吉彦设计的一个开放题：

在一个透明的立方体形状的容器内，盛了一些水，固定容器底部的一边，将容器倾斜，由于倾斜度的不同，水的各个表面的形状、大小都在变化，试指出各种变化的情形及各种量之间可能存在的关系.

在上面这个问题中，如果固定容器底面的一个顶点，情况怎样？如果容器的形状为三棱柱，仍固定底部一边，情况怎样？

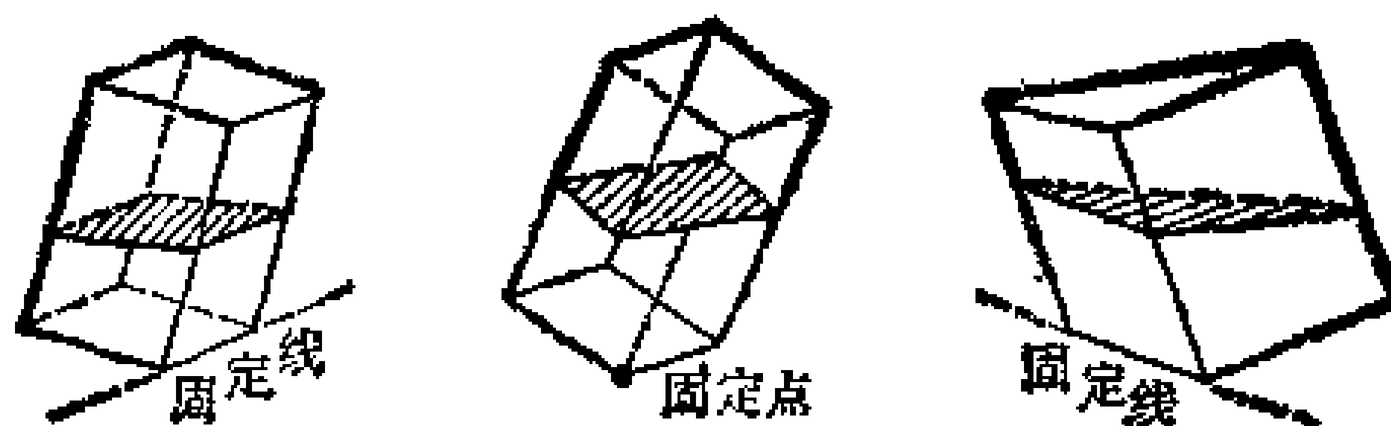


图 2-4

五、按评分的客观性分类

有唯一正确的答案，不论由谁评分都只能给出同一个分数的习题，叫做客观性习题；正确答案可用多种方式表述，评分者须凭主观经验给分的习题，叫做主观性习题.

传统的证明题、计算题等，都属于主观性习题. 以证明题来说，虽然有明确的已知条件和求证结论，但是不同的学生可以依据不同的知识、采取不同的方法来解题，即使有同一依据、采取相同的方法，在叙述过程中，其繁简程度、清晰程度和严谨程度也各不相同，面对习题解答中的多种多样的情况，教师只能凭主观经验予以评分. 因此采用主观性习题作为考试题目，从考试的准确性、可

[1] Nobuhiko Nohda «The Heart of 'Open-Approach' in Mathematics Teaching», Proceedings of ICMI-JSME Regional Conference on Mathematical Education (1984) p. 314.

靠性要求来说，有其不利的一面.

客观性习题又可分为选择题、填充题和简短的问答题等类型，通常所说的客观性习题，主要是指选择题．选择题属于固定应答型题目，它的结构严谨，这种题目的答案学生不能自由发挥，不能出现部分正确的答案，也不能在解答中掺杂与试题无关的内容，学生只能选择答案固别无他途，因此在考试中采用客观性习题，对于提高考试的准确性、可靠性有一定的好处．关于选择题的优缺点，选择题的进一步分类以及其他有关问题，我们将在第七章中论述.

对数学习题进行分类，有助于习题解法的探求和研究，也有助于教师在不同的教学阶段和条件下适当地选择、运用数学习题.

第二节　数学习题的功能

如前所述，在数学教学中解答习题本身并不是目的，解题之所以成为中学数学教学活动的主要形式之一，是因为数学习题存在着多种功能，当学生一旦进入解题这一活动情景之中，他就接受着一种“思想的体操”的训练，从技能的或思维的，智力的或非智力的，从各方面塑造着自己，以期达到数学教学大纲所提出的培养目标.

一、知识功能

通过数学习题，使学生获得系统的数学知识，形成必要的技能、技巧，这是数学习题的知识功能．数学习题的知识功能贯穿在学生获得数学知识的三个阶段之中.

（一）通过数学习题引入新知识　学习新知识，最重要的是建立新旧知识之间的联系，奥苏贝尔把全部教育心理还原为一条原理，就是"影响学习的最重要的因素是学生已经知道了什么，根据

学生的原有状况进行教学”．而建立新旧知识之间的联系必须首先引起学生的思考，在学生的思想上产生疑问．所谓学起于思，思源于疑．在这个过程中，数学习题是架设在新旧知识之间的桥梁，并且是激起疑问漪涟的物化手段．优秀教师常常是通过数学习题将学生引导到学习新知识的情景之中．如在讲因式分解的拆项添项法时，先提出题目：

因式分解：x^6-1．

在学生的多种结果中提出下面两种解法：

1．$x^6-1=(x^3)^2-1=(x^3-1)(x^3+1)$
$=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$；

2．$x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$
$=(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$．

结果不同！“是其中之一的解法有错吗？”当学生通过验算否定这一想法之后，自然归结到怎样将 x^4+x^2+1 继续分解，这样就引入了新知．

（二）通过数学习题巩固知识　巩固知识不仅靠复诵，更主要的是理解，如掌握数学概念，实质上就是掌握某类数学对象的共同的本质特点，意味着能区分数学概念的有关特征、数学概念的肯定例证与否定例证．如为使学生掌握“无理数”这个概念，通常必须伴以“证明$\sqrt{2}$不是有理数”这样的习题，以提供肯定的例证，还可辅以“无限小数都是无理数吗？”“带根号的数都是无理数吗？”等问题，对概念进行正反两面的辨析．

在掌握概念的过程中，比形成概念更为重要的是概念的同化，即把新获得的概念纳入到原有的认知结构中去．数学习题能够积极地引起学生进行认知活动．如在讲了“绝对值”概念之后，学生若不进一步演算：求 $|a-2|$；求 $|a-1|+|3-a|$；解 $|x|>2$；解 $|x-5|<6$；解$x^2-5|x|+6=0$ 等题目，就难以深化学生对概念的理解．

所以，牛顿说过，在数学中，例子比定律更为重要.

（三）通过数学习题运用知识　掌握了数学概念、定理、公式，进一步如何运用呢？主要还得通过解题．如“抽屉原理”，理解这个关于存在性的数学原理并不困难，但是运用它去解决问题却需要具备“制造抽屉”的技巧，譬如说常用的技巧有“划分剩余类”、“划分相等的子区间”、“将几何图形分割为全等的几部分”等等，这些技巧学生是通过典型习题的演算而获得的.

二、教育功能

数学学科对学生文化素质的培养可分为两个方面，即智力的与非智力的．从智力方面来看，数学的育人，主要是通过数学教育培养学生的科学的思维方式，形成学生良好的思维习惯．数学的这一发展智力的功能是通过数学教学的全过程来实现的．数学教学的过程，即概念的形成过程、结论的推导过程和方法的探索过程都离不开解题．通过解题使学生获得和发展推理能力、化归能力、形式化处理问题的能力、整体地考虑问题的能力以及运用对应、函数、同构、极限、方程等数学观念的能力.

思维品质是衡量思维能力强弱的一个指标．数学习题使学生的思维活动有一定水平的目的性、方向性、确定性和辨别性，从而为成培养学生良好的思维品质的重要工具．在解题活动中，有的放矢地转化解题方法，从一种途径转向另一种途径，可以培养思维的灵活性；坚持数学运算速度的要求，同时使学生掌握合理的运算技巧和探索问题的方法，可以培养学生思维的敏捷性；分析数学习题的条件的实质，以及条件之间的相互联系，发现题的隐含条件，可以培养学生思维的深刻性；使学生明白所选择的解题思路是否正确，善于发现问题，提出质疑，及时摒弃自己的错误，可以培养学生思维的批判性；在解题中引导学生重视常规而又不墨守成规，寻求变异，从多角度、全方位考虑问题，可以培养学生思维的广阔性；

在解题中鼓励学生主动地、独立地、别出心裁地提出新方法、新见解，不循因守旧，不迷信权威，善于联想，善于类比、推广，可以培养学生思维的创造性.

除了智力方面的培养之外，数学习题还在非智力方面有培养作用. 辛钦(А. Я. Хинчин)着重指出过，数学课程对形成学生的性格和道德个性方面有巨大的作用，他特别提到如下四点，即真诚、正直、坚韧和勇敢. 完成数学习题和进行写作不同，在写作中，学生自己看来是成功的东西，可能得到完全不同的评价. 对于数学习题，则是另一种情形，总是从一个确定性来评价解题的好坏. 学生自己能够、并且应该善于检查出其中的逻辑性错误；在解题时，他连检查答案是否正确的方法也了解. 不难理解，结果的清晰无误，能够并且在事实上也积极地影响着学生的顽强性、坚定性的形成. 成功在这里也是直接感觉得到的，正如在一盘棋或一场体育比赛中那样，学生自己能够怀着类似的信心，像他们那些权威性老师那样判断和评价自己的成果.[1] 对于一个数学习题的解答，一般没有正确与错误之争，而只有好与不好的问题，数学真理性的这种不可争辩性，包含着巨大的教育价值. 当十二岁的爱因斯坦接触到"三角形的三个高交于一点，它们本身虽然不是显而易见的，但是可以很可靠地加以证明，以致任何怀疑似乎都不可能"[2]，目睹了一个逻辑体系的奇迹之后，曾经赞叹欧几里得几何"使人类理智获得了为取得以后的成就所必需的信心."

数学习题的教育功能还在于它能给学生以美的陶冶，数学习题的条件的和谐性、独立性，形式的对称性，解法的合理性、简练性和独创性，一题多解的殊途同归，无不表现了数学的统一美、简单

---

[1] Б. В. 格涅坚科《当代世界的数学和数学教育》，《齐齐哈尔师范学院学报增刊·数学教育研讨》1987 年 5月.

[2] 《爱因斯坦文集 第一卷》第 4 页，商务印书馆，1976 年.

美和奇异美. 在数学习题的解法的探索过程中，其动力往往来自对美的追求. 魏耳(H. Weyl)说过"除了语言和音乐之外，数学是人类心灵的自由创造力的最主要的表现，""我的工作常想把真实和美统一起来，但当我不得不在这两者中选择时，我通常选择美."

此外，通过数学习题中的辩证思想，数学习题反映着客观现实的各种现象，可以向学生进行辩证唯物主义世界观的教育；数学习题所反映的我国传统数学的成就，以及科学技术文化的发展成就，有助于学生爱国主义思想的培养.

三、评价功能

学业成绩的检查与评定是整个教学过程的有机部分. 数学成绩的好坏一般是通过解题来评定的. 评定的内容有两方面，一是知识水平，二是能力水平. 目前我国中小学数学的考评，是以考查知识水平为主的，同时结合考查能力水平. 各级数学竞赛试题则以考查能力为主.

以考查知识水平为主的试题，应考虑题目是否符合教学大纲的要求，知识的覆盖面，掌握知识的深度和运用知识解决问题的熟练程度. 以考查能力水平为主的试题，如数学竞赛题，其"性质和学校中的考试是不同的，和大学的入学考试也是不同的!"数学竞赛题必须"能够灵活地掌握已知的原则，和利用这些原则去解决问题，""正确地考验和锻炼同学们的数学才能".[1]美国有一种SAT (Scholastic Aptitude Test)测验，它是美国的"大学入学考试委员会"为16～18岁的高中毕业生设计编制的标准化能力测验. SAT的数学部分称为SAT-M，这种测验共有60道选择题，主要测定学生数学学习能力的发展水平，而不是一般数学学科的学习成绩，试题与学科知识没有直接联系，因此聪明的少年也能完成这

[1] 华罗庚《数学竞赛》,《数学通报》1956年第6期.

一专为高中毕业生设计编制的测验，SAT-M测验曾被用来比较中美两国数学早慧儿童的数量和质量的差异。

第三章　数学习题的科学性

科学性是对数学习题本身的结构和叙述的合理性、严谨性和清晰性的要求. 一个条件不足或叙述不清的数学习题, 即使一个具备良好基础和数学能力的学生也会感到困惑不解, 在考试中则会导致学生非正常的失分, 严重影响考试的效度和信度. 不符合科学性的习题, 不仅浪费人们的宝贵时间, 并且可能将初学者引入歧途, 尤其对于学生的逻辑思维能力的形成和发展将带来损害. 演算不符合科学性的习题, 久而久之, 还会使学生养成缺乏独立思考和缺乏自信心的心理状态.

下面这个高考试题, 由于其措词不清, 曾在全国范围内引起相当广泛的不同解释, 该题为"抛物线的方程是 $y^2=2x$, 有一个半径为 1 的圆; 圆心在 x 轴运动, 问这个圆运动到什么位置时, 圆与抛物线在交点处的切线互相垂直. "对上面加着重号的句子, 按命题人的原意是"圆与抛物线在同一交点处的切线互相垂直. "由于缺少"同一"两个字, 以该年黑龙江省的考生为例, 根据抽样统计大约有 15% 的人理解为"在一个交点处圆(或抛物线)的切线与另一交点处的抛物线(或圆)的切线互相垂直." 应该说这样的理解是无可责难的. 于是试题本身的歧义就极大地损害了考试的有效性. 类似上述这种在科学性方面值得商榷的数学题, 目前不仅在数学读物上屡见不鲜, 而且在课本以及某些重大的考试试题中也时有发现, 这一现象的存在, 除了说明题目的编制者其能力有某种缺陷之外, 更重要的是说明评价数学习题科学性的理论普及的必要性.

下面讨论数学习题科学性的六条标准:

1．有关的概念必须是被定义的；

2．有关的记号必须是被阐明的；

3．条件必须是充分的、不矛盾的；

4．条件必须是独立的、最少的；

5．叙述必须是清楚的；

6．要求必须是可行的。

第一节　有关的概念必须是被定义的

明确的概念是每一个系统（课本就是一个系统）科学叙述的起点，习题中所提供的概念应以本系统所提供的为准，既不能出现本系统所未定义的概念，也不能违背本系统对概念的定义而作任何其他的解释．

【例1】　平面 ABC 外一点 P 到 $\triangle ABC$ 三边的距离相等，O 是 $\triangle ABC$ 的内心．求证：$OP\perp$平面 ABC．（六年制重点中学高中课本《立体几何》第52页，人民教育出版社，1981年12月第1版）

此例涉及概念："点到线段的距离"，课本虽有"点到直线的距离"的定义，但并未定义"点到线段的距离"，而对于后者，人们常常作出不同的解释：

1．点到线段的距离就是点到此线段所在直线的距离；

2．从一点作线段所在直线的垂线，如果垂足在线段内，那么这一点到直线的距离叫做点到线段的距离．

于是，命题的真假引起了争议（见[1],[2],[3]），文[1]，[2]坚持第

［1］孙继武：《对一习题的看法》，《教学与研究（中学数学）》1986年第6期．

［2］韩英杰：《对一道习题的商榷》，《中学数学研究》1986年第11期．

［3］赵中梁：《关于"棱柱的高和棱锥的高的定义"的异议》，《教学与研究（中学数学）》1986年第11期．

1 种理解，这样，从 P 点作平面 ABC 的垂线，其垂足也可能是 $\triangle ABC$ 的旁心，并不一定是 $\triangle ABC$ 的内心，因此结论"$OP\perp$平面ABC"难以成立。

【例 2】 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 展开式中前三项的系数成等差数列，求展开式中的有理项。

我们知道，二项展开式各项的系数是

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \cdots,\ C_n^{n-1},\ C_n^n,$$

它与二项式$(a+b)^n$中 a, b 分别代表什么无关，因此，在上例中二项式 $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 展开式前三项的系数是 C_n^0, C_n^1, C_n^2, 而不是 C_n^0, $\frac{1}{2}C_n^1$, $\frac{1}{4}C_n^2$, 但原题只有当 C_n^0, $\frac{1}{2}C_n^1$, $\frac{1}{4}C_n^2$成等差数列才有解，所以题中有关条件的措词应改述为"展开式中前三项字母 x 的系数成等差数列，"以期符合命题的初衷。

【例 3】 证明四边形 $ABCD$ 是梯形的充要条件是 $\sin A\sin C=\sin B\sin D$.

在四边形 $ABCD$ 的条件下，有 $A+B+C+D=2\pi$, $-\pi<A-C$, $B-D<\pi$, 于是

$$\sin A\sin C=\sin B\sin D$$

$$\Leftrightarrow \cos(A+C)-\cos(A-C)=\cos(B+D)-\cos(B-D)$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-C)=\cos(B-D)$$

$$\Leftrightarrow A-C=\pm(B-D)$$

$$\Leftrightarrow A+D=B+C \text{ 或 } A+B=C+D$$

$$\Leftrightarrow AB\parallel CD \text{ 或 } AD\parallel BC.$$

通过以上分析，可以看到，只有将梯形定义为"一组对边平行的四边形"，上述命题才是真命题，这就违背了目前课本中的定义："一组对边平行而另一组对边不平行的四边形叫做梯形。"诚然，

关于梯形的定义孰优孰劣，教学法专家们还持有不同的意见，但是，作为一个数学习题，有关概念的运用应以课本为准，乃是不可缺少的一项科学性的要求。

第二节　有关的记号必须是被阐明的

数学记号是用以代表概念或联系词的，在不同的系统中同一概念可以用不同的记号来表示，如"实数集合"，课本中用 R 表示，而[1]中则用 D 来表示，D 在课本中又常常用以表示线性方程组的系数行列式．又如$\sqrt{-1}$，在不同系统中被解释为 $\sqrt{-1}=i$ 或 $\sqrt{-1}=\pm i$，而在现行课本中则什么也不表示，也就是说$\sqrt{-1}$在现行课本中是一个未被阐明的记号．在国际中学生数学奥林匹克竞赛中，凡是出现并非为各国中学生所普遍熟悉的记号，如$[x]$（不大于实数 x 的最大整数），$\deg(p)$（多项式$p(x)$的次数），都特别阐明它的意义．这是完全必要的．

【例 4】　a, b 是什么实数时，$a+\sqrt{b}$是有理数？是实数？是虚数？是纯虚数？（全日制十年制学校高中课本《数学第三册》第 115 页，人民教育出版社 1979 年 4 月第 1 版）

当 $b<0$ 时，$\sqrt{b}$ 表示什么？这是课本未阐明的记号，学生无法理解，所以本题在改编课本时被理所当然地予以扬弃．

【例 5】　设 n 是正整数，求证

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta).$$

（全日制十年制学校高中课本《数学第三册》第 112 页，人民教育出版社 1979 年 4 月第 1 版）

对复数 z 来说，当 n 是正整数时，z^{-n} 表示什么？课本并未阐

[1] 翟连林等《中等数学习题集　第一册》第 11 页，科学出版社 1980 年 9 月第 1 版．

明，改编后的课本(高级中学课本《代数第二册(甲种本)》第229页，人民教育出版社1984年9月第1版)虽曾阐明"式子$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}$的意义是$\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}$"，仍感不足，应该明确地指出记号$z^{-n}$由下式定义：

$$z^{-n}=\frac{1}{z^n}, \text{其中 } n\in N,\ z\in C,\ z\neq 0.$$

由于人们对数学记号的理解不同，常引起对某些习题的争论。争论的部分原因，是某些数学记号在特定课本的章节里，其涵义有所约定，如在"数列"中，约定用d，q分别表示等差数列的公差和等比数列的公比，在"根式运算"中约定字母都表示正数，但这些记号离开了特定的章节，是否仍具有原来所约定的涵义呢？不能这样认为，如$\sqrt{a^2b}$在"根式运算"中化简为$a\sqrt{b}$，离开这一具体章节，则应有

$$\sqrt{a^2b}=\begin{cases} a\sqrt{b} & (a\geq 0);\\ -a\sqrt{b} & (a<0).\end{cases}$$

【例6】 求曲线$x^2-y^2=a^2$，$x=a+h(h>0)$所围成图形绕x轴旋转而成的旋转体体积.（全日制十年制学校高中课本《数学第四册》第205页，人民教育出版社1979年8月第1版）

本题中有两个表示常量的字母h和a，其中$h>0$. 但是a表示什么呢？人们存在着两种不同的意见：一种认为$a>0$；另一种认为应分为$a>0$，$a=0$及$a<0$三种情形加以讨论. 前一种意见以教学参考书为代表，其理由可以想象，即将$x^2-y^2=a^2$看成双曲线的标准方程，a是它的半实(或虚)轴，于是$a>0$；后一种意见则将a看作一般方程中的一个实常数，所以有：

1. 当$a\geq 0$时，所求体积为$\int_a^{a+h}\pi(x^2-a^2)dx$；

2. 当$a<0$时，再分为三种情形：(1)$h<|2a|$时，本题无

解；(2)$h=|2a|$时，所求体积为0；(3)$h>|2a|$时，所求体积为
$\int_{-a}^{a+h}\pi(x^2-a^2)dx$.

对本题的妥善处理是添加条件$a>0$，这样就可避免题意发生歧义.

第三节　条件必须是充分的、不矛盾的

从教育观点来看，我们不能让学生去证明一个假命题，也不能让学生去解答一个无解的计算题．对作图题和轨迹题，在讨论中部分地出现无解或无轨迹的情形是应该允许的，但不应整个题无解或无轨迹．唯独对于解方程(组)或解不等式(组)，其结果允许无解，也就是允许所给的方程(组)或不等式(组)是矛盾方程或矛盾不等式．因为解答这类习题，我们要求的是求出解集，而空集是其中可能出现的一种情形．

条件不足的命题不是真命题．我们常常通过举反例的方法来说明这一点．

【例7】　两条斜线段PA，PB和平面α所成的角相等的充要条件是$PA=PB$．(六年制重点中学高中课本《立体几何》第30页，人民教育出版社1981年12月第1版)

实际上，当P点在平面α内时，我们既不能由"$PA=PB$"推出"两条斜线段PA，PB和平面α所成的角相等"，也不能由"两条斜线段PA，PB和平面α所成的角相等"推出"$PA=PB$"．因此，本题是假命题．纠正的办法是在已知事项中补充条件："P点在平面α外"．

【例8】　求证共轭虚数的n $(n\in N)$次幂仍是共轭虚数．(高级中学课本《代数第二册(甲种本)》第239页，人民教育出版社1984年9月第1版)

我们容易举出上述命题的反例. 事实上,设

$$z=r\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)$$

则

$$\bar{z}=r\left[\cos\left(-\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{n}\right)\right].$$

当 $n>1$ 时 $\sin\frac{\pi}{n}\neq0$, 所以 z 与 $\bar{z}$ 是共轭虚数, 但

$$z^n=r^n(\cos\pi+i\sin\pi)=-r^n,$$

$$\bar{z}^n=r^n[\cos(-\pi)+i\sin(-\pi)]=-r^n.$$

因此 z^n 与 $\bar{z}^n$ 不是共轭虚数. 特别地, 当 $n=3$ 时, 1 的两个虚立方根 ω 与 ω^2 是共轭虚数, 但它的 3 次幂都等于 1, 当然不是共轭虚数. 纠正本题的办法是, 将已知事项和结论中的"共轭虚数"都改为"共轭复数".

【例 9】 $\triangle ABC$ 中 $AB>AC$, AB, AC 的中垂线分别交 BC 于 D, E 两点. 求证 $AD>AE$. (《数学基础训练(初中二年级第二学期)》第 56 页, 广东教育出版社、河南教育出版社、湖南教育出版社 1985 年 12 月)

图 3-1

本题的已知事项既然有"AB, AC 的中垂线分别交 BC 于 D, E 两点"就排除了 $\angle A$ 是直角的可能. 当 $\angle A$ 是钝角时, 由已知事项可以得出"$AD>AE$"的结论; 而当 $\angle A$ 是锐角时(图 3-1)则有 $AD<AE$. 实际上我们可先证明 E 不在 D, C 之间, 因为若不然则 D 在 B、E 之间, 这时

$$\begin{aligned}\angle A&=\angle BAD+\angle DAE+\angle EAC\\&=\angle B+\angle DAE+\angle C\\&=180^\circ-\angle A+\angle DAE\end{aligned}$$

于是

$$2\angle A=180^\circ+\angle DAE,$$

$$\angle A=90^\circ+\frac{1}{2}\angle DAE>90^\circ$$

此与 $\angle A$ 是锐角矛盾．所以 E 在 B, D 之间．于是

$$\angle ADE=\angle ADB=180^\circ-2\angle B,$$

$$\angle AED=\angle AEC=180^\circ-2\angle C.$$

$$\because\quad AB>AC,\qquad \therefore\quad \angle B<\angle C.$$

$$\therefore\quad \angle ADE>\angle AED.$$

$$\therefore\quad AE>AD.$$

通过以上反例，可知本题的已知条件是不充分的．纠正的办法是在已知事项中增添条件"$\angle BAC$ 为钝角"．

无论是计算题还是证明题，我们的原则性的要求是：条件必须是不矛盾的．一道数学习题是一个和谐的整体，各已知事项之间除了题目所陈述的比较显然的关系之外，往往还受着一些隐含条件的约束，如果不能把握这种内在的、隐蔽的相依关系，就有可能失去和谐性，在条件之间产生矛盾．我们说这种矛盾关系有时是如此隐蔽，以致当我们根据题设的不和谐条件，竟可以把题目"解了出来"．题目中的条件矛盾的情形有以下几种：

一、直接与某个真命题相悖

【例 10】 一个正三棱台的下底和上底的周长分别为 30 cm 和 12 cm，而侧面积等于两底面积之差，求斜高．（1987 年全国高等学校招生理科数学试题）

由本题的已知条件可得

下底面积＝侧面积＋上底面积，

这一关系直接与下列定理相悖：多面体任何一面的面积小于其他各面面积之和．（这个定理是平面几何定理"多边形任何一边小于其他各边之和"在空间的推广．）

二、虚假的前提

【例 11】 已知 $a>0$，且 $4a^2+9b^2=4ab$. 求证

$$\lg\frac{2a+3b}{4}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b).$$

下面是本题的一个"解法"：

将 $4a^2+9b^2=4ab$ 变形为

$$\left(\frac{2a+3b}{4}\right)^2=ab, \qquad ①$$

两边取常用对数，再乘以 $\frac{1}{2}$ 得

$$\lg\frac{2a+3b}{4}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b). \qquad ②$$

这一解法看起来无懈可击，但实际上由①到②必须具备条件：$a>0$, $b>0$. 而根据 a, b 的已知关系：$4a^2+9b^2=4ab$，可推知 $(2a-b)^2=-8b^2$，由此判断 a, b 不可能是非零实数，更不可能都是正数，所以本题的前提是虚假的，它不能使结论 $\lg\frac{3a+4b}{4}=\frac{1}{2}(\lg a+\lg b)$ 有意义。

三、由于条件过剩导致互不相容

【例 12】 已知△ABC中$A:B:C=2:3:4$, $AB:BC=3:2$, $AC=5$，求△ABC的周长．(1985 年安徽省成人高校招生数学试题)

由已知△ABC中$A:B:C=2:3:4$，可得 $A=40°$, $C=80°$，于是 $AB:BC=\sin C:\sin A=\sin 80°:\sin 40°=2\cos 40°$，这与已知条件 $AB:BC=3:2$ 矛盾．

怎样改正题目中的错误呢？考虑到 AC 是唯一的已知线段，所以条件 $AC=5$ 不可去掉．于是可以得下列几个方案：

1．去掉条件 $AB:BC=3:2$；

2．保留 $AB:BC=3:2$，去掉条件 $A:B:C=2:3:4$，在$0°<B<180°$ 条件下，对 B 任意赋值；

3. 保留 $AB:BC=3:2$, 去掉条件 $A:B:C=2:3:4$, 对 A 赋值, 但考虑到 A 非 $\triangle ABC$ 中的最大角, 因此赋值时受到限制. 事实上, 设 $AB=3k$, $BC=2k$(图 3-2). 则

$$\cos A=\frac{(3k)^2+5^2-(2k)^2}{2\times 3k\times 5}$$

$$=\frac{k^2+5}{6k},$$

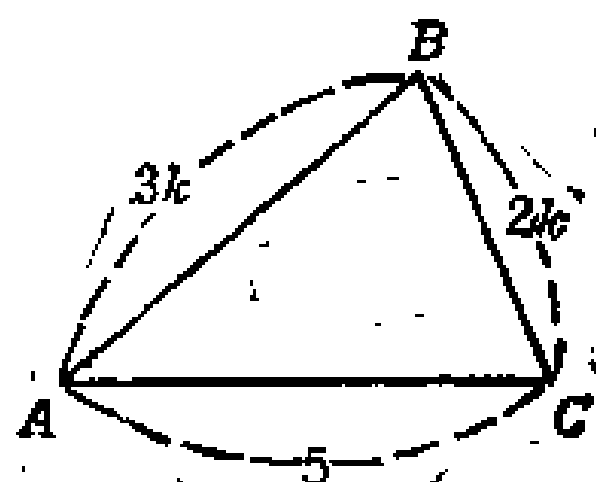


图 3-2

即 $$k^2-6k\cos A+5=0,$$

此式 k 有正值当且仅当

$$\Delta=(6\cos A)^2-4\times 5\geqslant 0,$$

即 $$\cos^2 A\geqslant\frac{5}{9}.$$

因为 A 必须是锐角, 故有

$$\cos A\geqslant\frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$A\leqslant\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

这说明在 $0^\circ<A\leqslant\arccos\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ 条件下对 A 赋值, 已知条件将是和谐的;

4. 保留 $AB:BC=3:2$, 去掉条件 $A:B:C=2:3:4$, 对 C 任意赋值.

【例 13】 甲从 A 地出发到 B 地, 乙从 B 地出发到 A 地. 甲先行 2 公里, 则又经 2 小时后在 AB 的中点处与乙相遇; 若同时出发, 则相遇后甲再走 $2\frac{1}{2}$ 小时到达 B 地, 乙再走 $1\frac{3}{5}$ 小时到达 A 地. 问甲、乙两人的速度各是多少? (1984 年江苏省南通市郊县高中、中专统一招生试题)

对本题的以下分析是祝正平(1985)作出的.

设甲的速度为每小时 x 公里, 乙的速度为每小时 y 公里. 则

由题意

甲先行2公里又经2小时所走的路程

=乙经2小时所走的路程.

可列出方程 $$2+2x=2y,$$

即 $$x-y+1=0; \qquad ①$$

又由题意，甲、乙同时出发，两人相遇后甲再用$2\frac{1}{2}$小时所走的路程+乙再用$1\frac{3}{5}$小时所走的路程=A，B两地之间的路程.

可列出方程 $$2\frac{1}{2}x+1\frac{3}{5}y=4y,$$

即 $$25x-24y=0; \qquad ②$$

又由题意，甲、乙同时出发，两人相遇前所用的时间相等，即

甲走$1\frac{3}{5}y$公里所用的时间=乙走$2\frac{1}{2}x$公里所用的时间.

可列出方程 $$1\frac{3}{5}y\div x=2\frac{1}{2}x\div y,$$

即 $$5x-4y=0. \qquad ③$$

通过以上分析可知，两个未知数，要满足3个约束条件，实际上由①，②，③组成的方程组是矛盾方程组，所以本题应该认为是错题.

修改本题的一个简单易行的方案是：去掉一个过剩条件，将"又经2小时后在AB的中点处与乙相遇"改为"2小时后两人所走的路程相等"。这样就只能列出方程①和③，解得$x=4$，$y=5$.

四、有关的已知量赋值不当

【例14】 已知

$$\sin\alpha=\frac{5}{7}, \qquad \cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14},$$

且α，β都是锐角，求$\cos\beta$.（全日制十年制学校高中课本《数学第一册》第164页，人民教育出版社1979年2月第1版）

我们容易指出已知条件

$$\sin\alpha=\frac{5}{7}, \quad ①$$

$$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}, \quad ②$$

$$0<\alpha,\ \beta<\frac{\pi}{2} \quad ③$$

的矛盾性．事实上，由③得$0<\alpha+\beta<\alpha+\frac{\pi}{2}<\pi$．在$(0,\ \pi)$上余弦函数单调递减，从而有

$$\cos(\alpha+\beta)>\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha,$$

将①，②分别代入，得$-\frac{11}{14}>-\frac{5}{7}$，这是矛盾的。

欲消除上述矛盾，使本题的已知条件得以协调，在其他条件不变的情况下，可将①改为$\sin\alpha=k$，这里$k\in\left(\frac{11}{14},\ 1\right)$，或将②改为$\cos(\alpha+\beta)=h$，这里$h\in\left(-\frac{5}{7},\ \frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$.

【例15】 一个长方形的对角线为5，长与宽之和为8，求这个长方形的面积．

考虑题设条件，令长方形的长和宽分别为x，y，则对角线长为$\sqrt{x^2+y^2}$，面积为xy．有

$$\begin{cases} x+y=8; & ① \\ \sqrt{x^2+y^2}=5. & ② \end{cases}$$

$\frac{1}{2}\left[\ ①^2-②^2\ \right]$得 $\qquad xy=\frac{39}{2}$.

这一结果表面上看来似乎无可指责，实际上是有问题的，因为题设条件中包含着矛盾，压根儿不存在这样的长方形．就方程组来分析：

由①，得 $\qquad y=8-x$,

代入②，得 $\sqrt{x^2+(8-x)^2}=5$，

两边平方后整理，得 $2(x-4)^2=-7$.

这是一个矛盾的式子，说明原方程组不存在实数解.

长方形的长、宽之和与对角线长是存在着隐含的制约关系的. 因为

$$(x+y)^2\leqslant 2(x^2+y^2),$$

从而有 $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\sqrt{2}$. 但本题中 $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{8}{5}>\sqrt{2}$. 于是就出现了矛盾.

再看一个流行颇广的错题.

【例 16】 已知平行四边形的两邻边长分别为 3, 9, 两条对角线的一个交角为 60°. 求平行四边形的面积.

如图3-3，平行四边形的面积 $S=4\times\frac{1}{2}xy\sin 60^\circ=\sqrt{3}\,xy$.

由余弦定理得

$$\begin{cases} x^2+y^2-2xy\cos 60^\circ=3^2; \\ x^2+y^2-2xy\cos 120^\circ=9^2. \end{cases}$$

解之得 $xy=36$. 从而得 $S=36\sqrt{3}$.

考虑到两邻边分别为 3, 9 的平行四边形，其最大面积(当为矩形时)为 $3\times9=27$，因此上述结果 $S=36\sqrt{3}$ 是不合理的，产生这种情况的原因是题目中的已知条件不和谐，下面我们作一般性的分析.

两邻边分别为 a, $b(a\leqslant b)$ 的平行四边形，其对角线所成的角 α 的取值范围怎样?

如图 3-4，我们有

$$2(x^2+y^2)=a^2+b^2 \quad ①$$

$$\cos\alpha=\frac{x^2+y^2-a^2}{2xy} \quad ②$$

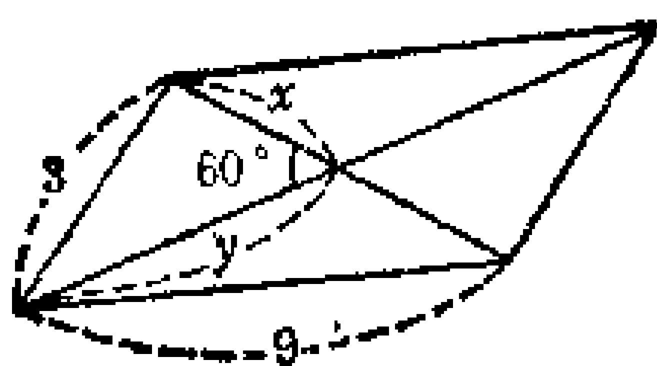


图 3-3

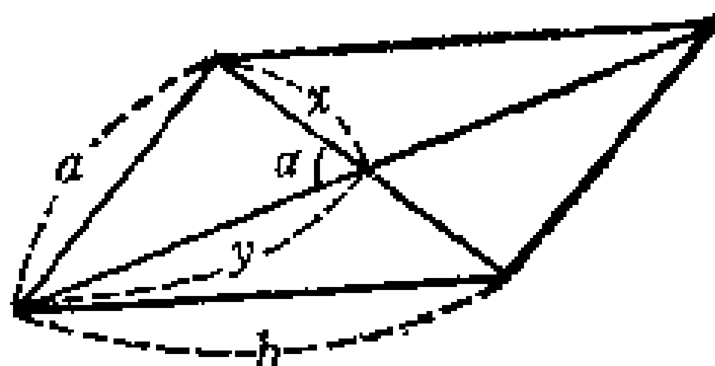


图 3-4

$$-\cos\alpha=\frac{x^2+y^2-b^2}{2xy}. \quad ③$$

②－③ 得 $2\cos\alpha=\dfrac{b^2-a^2}{2xy}$.

注意到 $2xy\leqslant x^2+y^2$，并考虑 ①，得

$$\cos\alpha\geqslant\frac{b^2-a^2}{2(x^2+y^2)}=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}.$$

此式当 $x=y$ 即平行四边形为矩形时取等号.

$$\therefore\quad \alpha\leqslant\arccos\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}.$$

当 $a=3$, $b=9$ 时 $\arccos\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}=\arccos\dfrac{4}{5}\approx36°53'$.

由此可见，取 $\alpha=60°$ 是不合理的，为运算简便起见，可取 $\alpha=30°$. 若是取 $\alpha=60°$，则有 $\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{b^2-a^2}{b^2+a^2}$，即 $b\leqslant\sqrt{3}a$. 当 $b=9$ 时 $a\geqslant 3\sqrt{3}$，此时 a 可能取的整数值为6, 7, 8; 当 $a=3$时，$b\leqslant3\sqrt{3}$，此时 b 可能取的整数值为 4, 5.

第四节　恒等式与条件等式中的条件不足问题

关于条件不足的问题在恒等式与条件等式中是较为常见的，本节专门讨论这类问题.

恒等式的概念，有关的数学文献中是有争议的. [1]初中数学

[1] 阅见诺窝塞洛夫《恒等式和方程的概念》，《数学通报》1956年第1期.

课本指出："如果两个代数式，不管其中的字母取(使两式都有意义的)什么值，这两个代数式的值都相等时，我们就说这两个代数式恒等.……表示两个式子恒等的等式叫做恒等式."[1]高中课本又将恒等式这一概念的外延扩展到指数恒等式、对数恒等式、三角恒等式、反三角函数恒等式和某些复合函数的恒等式. 如

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1; \quad ①$$

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)=\frac{2x}{1-x^2}; \quad ②$$

$$\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B+\operatorname{tg}C=\operatorname{tg}A\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C, \quad ③$$

其中①,②是恒等式,③不是恒等式.

为了行文方便,我们设使式 f 有意义的字母取值集合为 D_f,使式 g 有意义的字母取值集合为 D_g,且 $D=D_f\cap D_g$,则 D 叫做恒等式 $f=g$ 的允许值集. 于是我们可以把恒等式分成两类:

一、D 为有关式子的论域,如①,D 就是它的论域:实数集;

二、D 为有关式子的论域的真子集,如②,$D=\{x|x\in R, |x|\neq 1\}$.

对于有关恒等式习题的正确提法应该是"证明恒等式",只有对第一类恒等式,才可以将其中"恒等式"三字省略,而仅写"证明"或"求证". 如

证明 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$("恒等式"三字已省略);

证明恒等式 $\operatorname{tg}(2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)=\frac{2x}{1-x^2}$("恒等式"三字不可省略).

第二类恒等式的另一种提法是,虽不指明是恒等式,但限定式中的字母的取值范围. 如

求证 $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}x)=\frac{2x}{1-x^2}$ $(|x|\neq 1)$.

关于一些数学公式的处理,为了帮助学生理解公式是恒等式,

[1] 全日制十年制学校初中课本《数学第二册》第106—107页,人民教育出版社1981年5月第1版.

防止不考虑条件、不注意字母的取值范围而乱用的现象，也以采取限定式中字母的取值范围的方法为宜．如

两角和的正切公式：

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\in R, \alpha, \beta, \alpha+\beta\neq n\pi+\frac{\pi}{2},\quad n\in Z\right);$$

反正弦函数的性质：

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x\quad (x\in[-1,\ 1]);$$

等比数列前 n 项的和的公式：

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\quad (q\neq 1).$$

“恒等式是等式，但不是所有的等式都是恒等式．如 $x+2=10$ 就不是恒等式，因为只有当 $x=8$ 时，等式两边的值才相等．”[1]．像这类不是恒等式的等式，即字母的允许值集中的所有值并不都能满足的等式，如 ③ 就是条件等式．条件等式的成立依赖于条件，如 ③ 式在“$\triangle ABC$是斜三角形”条件下成立．有的论者将条件等式叫做“条件恒等式”，认为“三角恒等式可分一般恒等式与条件恒等式．”按逻辑学中属概念加种差的定义方式来要求，这是讲不通的，因为“条件恒等式”既是恒等式的一种，就应该把“恒等式”当作定义中的属概念，而不应把“等式”当作属概念．鉴于现行课本已将恒等式作为一个科学概念加以定义，按概念分类的逻辑要求，使叙述具有逻辑的清晰性，还是不应混淆条件等式和恒等式这两个概念．

条件等式既然不是恒等式，它的成立当然不能如恒等式那样只要对允许值集 D 的任意值来讨论就可，而应该完全依赖于已知条件，也就是说必须给足使所要证明的条件等式成立的条件，包括

[1] 全日制十年制学校初中课本《数学第二册》第 107 页，人民教育出版社 1981 年5月第1版．

使结论有意义的条件．如 ③ 式的成立应依赖已知条件"$\triangle ABC$是斜三角形"，而不是如某些课本或习题集那样"$\triangle ABC$ 中"．又如

已知 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, x\neq 0$．求证 $\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$．（六年制重点中学高中课本《代数第一册》第 116 页，人民教育出版社 1982 年 12 月第 2 版）

此题在同书 1981 年 12 月第 1 版中没有条件"$x\neq 0$"，我们认为新版本中增添这一条件是完全正确的．但是有的论者却认为"任何等式无论是已知的还是求证的都是指在它们有意义的范围内（即在所出现的函数的定义域内）来讨论的"．按照这种意见，不但已知条件中所给出的式子必须是有意义的（这是正确的），而且求证结论中式子的意义的存在性也是自明的（这是缺乏根据的）．这实际上仍是将条件等式当作恒等式的一种理解．对于结论是等式的证明题，已知条件中应该包含足以使结论有意义的条件，只有这样才能保证题目的科学性，才能使命题成为真命题．

目前，常见的证明条件等式的题目，按已知条件中的字母的允许值集（设为 D_1）和求证结论中的字母的允许值集（设为 D_2）的关系，可以分为三类：

1．$D_1=D_2$．这类命题是真命题．例如

已知 $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1,\ \frac{x}{a}\sin\theta-\frac{y}{b}\cos\theta=1,$

求证
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2.$$

其中 D_1, D_2 都等于$\{(a, b)\,|\,a, b\in R, ab\neq 0\}$．

2．$D_1\subset D_2$．这类命题也是真命题．例如

已知 $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\operatorname{tg}\beta=3$，并且 α, β 都是锐角．求证

$$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}.$$

其中 $D_1=\left\{(\alpha,\ \beta)\,|\,0<\alpha,\ \beta<\frac{\pi}{2}\right\}$, $D_2=\{(\alpha,\ \beta)\,|\,\alpha,\ \beta\in R\}$, 有 $D_1\subset D_2$.

3. $D_1\supset D_2$. 这类命题是假命题. 例如

已知 $(x+yi)^3=a+bi$, 这里 $a,\ b,\ x,\ y$ 都是实数. 求证

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=4(x^2-y^2).$$

(六年制重点中学高中课本《代数第二册》第237页, 人民教育出版社1984年9月第1版)

其中 $D_1=\{(a,\ b,\ x,\ y)\,|\,a,\ b,\ x,\ y\in R\}$, $D_2=\{(a,\ b,\ x,\ y)\,|\,a,\ b,\ x,\ y\in R,\ xy\neq 0\}$, 有 $D_1\supset D_2$. 纠正的办法是添加已知条件: "$xy\neq 0$".

第五节　条件必须是独立的、最少的

数学习题的条件必须是独立的、最少的, 即不应有重复的、多余的、过剩的条件. 数学习题存在多余的条件, 反映编题者思维的肤浅性. 从美学的角度来看, 多余的条件使题目显得臃肿, 违背思维的简单性、经济性原则. 多余的条件还可能使解题者误入歧途.

【例17】 $\triangle ABC$ 中 $A:B:C=1:2:6$. 求证 $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a+b+c}$. (《数学通报》1960年第3期问题解答)

本题可将已知条件"$A:B:C=1:2:6$"减弱为"$A:B=1:2$", 证法如下:

设 $A=x$ 则 $B=2x$, $C=\pi-(A+B)=\pi-3x$. 于是

$$\frac{a+b}{a+b+c}=\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin x+\sin 2x+\sin 3x}=\frac{\sin x+\sin 2x}{2\sin 2x\cos x+2\sin x\cos x}$$

$$=\frac{\sin x+\sin 2x}{2\cos x(\sin x+\sin 2x)}=\frac{1}{2\cos x};$$

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin x}{\sin 2x}=\frac{\sin x}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2\cos x}.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{b}=\frac{a+b}{a+b+c}.$$

【例 18】 一个 4×7 的方格棋盘，每个方格染成黑色或白色。求证：对任何一种染色方式，在棋盘中必定包含一个四角上的方格同色的矩形。（如图 3-5 中虚线方框所示）（美国 1976 年数学奥林匹克试题）

华罗庚曾指出本题存在多余的条件，即“4×7的方格棋盘”可改为“3×7的方格棋盘”。事实上就 3×7 的方格棋盘来说，先考虑第一行，由抽屉原理，其中 7 个方格至少有 4 个染成同一种颜色，比如说，都染为黑色，并且不失一般性，可以认为这 4 个被染成黑色的方格就在第一行的前面四格（图 3-6）。其次考虑第二行的前面四格，如果这四格中有 2 个方格染成黑色，在这种情况下，四角上的方格同色的矩形已经出现；不然的话，这四格中至少有 3 个方格染成白色，不妨认为这 3 个被染成白色的方格就在第二行的前面三格（图 3-7）。继续考虑第三行的前面三格，由抽屉原理，其中至少有 2 个方格同色，不论它们是黑色还是白色，棋盘中都将出现四角上的方格同色的矩形。

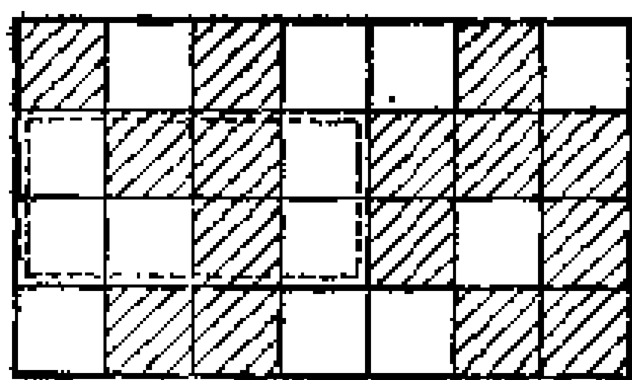


图 3-5

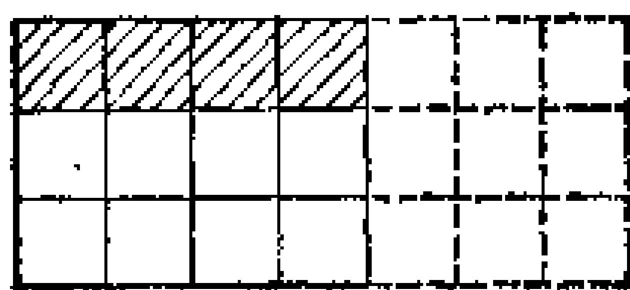


图 3-6

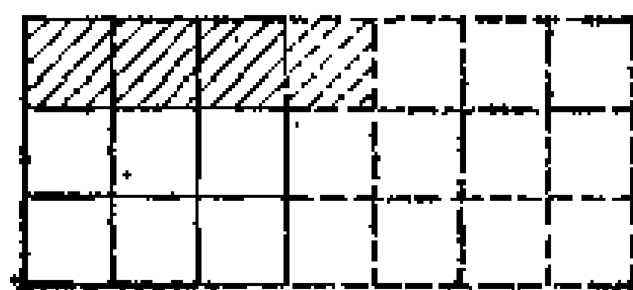


图 3-7

【例19】 $\triangle ABC$ 中 $AB=AC$，有一个圆内切于$\triangle ABC$ 的外接圆，并且与 AB，AC 分别相切于 P，Q．求证 P，Q 连线的中点是 $\triangle ABC$ 的内心．（第二十届国际数学奥林匹克竞赛试题）

本题的条件"$AB=AC$"可以去掉，条件减弱后的命题的证明见文．[1]

从教学上的可接受性方面着眼，为了降低题目的难度，有时也可保留一些多余的条件．这一点和平面几何课本处理几何公理时的方法相类似，为了便于学生接受，常常添加一些不独立的"公理"．当然保留题目的多余条件必须是有作用的，即能够使题目的难度降低，而这种降低对教学来说又是必要的，而例17，例18中这样毫无作用的多余条件则是不应保留的．例19中的多余条件的作用是使证明略为容易些．

从另一方面来说，给出条件后，题目的结论一般应该是最优的一些历史上有名的数学问题，如哥德巴赫猜想①、比勃巴赫猜想，②人们都是在一定的已知条件下，通过对结论的改进，来探求解决问题的道路的．优化结果的追求，这是数学发展的推动力之一．

对于某些数学习题，如

已知 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2=1$，$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$．求证 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\leqslant1$ （高级中学课本《代数第二册(甲种本)》第112页，人民教育出版社1984年9月第1版）

在不增添已知条件、不增加题目难度的情况下，其实是应该将

[1] 戎健君《一道国际数学竞赛题的推广》，《中学数学》1980年第2期．

① 哥德巴赫猜想也叫做哥德巴赫问题，是1742年6月7日由德国人哥德巴赫(C. Goldbach)给当时侨居俄国彼得堡的大数学家欧拉的一封信提出的，原问题是：是否任何不比6小的偶数均可表为两个奇质数之和？这个问题至今尚未得到彻底解决．

② 比勃巴赫猜想是1916年由德国人比勃巴赫(L. Bieberbach)提出的，原猜想是：定义在单位圆上形如 $z+a_2z^2+a_3z^3+\cdots$ 的单叶函数，有 $|a_k|\leqslant k$．比勃巴赫本人只证明了 $|a_2|\leqslant2$，结论经多次改进，最后由美国数学家达布兰奇斯(L. de Branges)于1984年彻底解决．

结论加强为"$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant 1$"的.

当然，我们不能要求课本中的每个题目都给出最优的结论.如下面这个高中课本中的例题，由于其结论不是最优的，因此，自1980年以来在我国中学数学界引起广泛的争议.[1]

已知 $x>0$，求证 $x^2+2x+\frac{4}{x^3}$的值不小于 6.（全日制十年制学校高中课本《数学第三册》第 64 页例 8，人民教育出版社 1979 年 4 月第 1 版）

我们撇开争议中认为"该题是一个假命题"这种谬误的意见，仅就该题的结论来说，的确是有改进的余地的，如在以后版本的课本中就改为"$x^2+2x+\frac{4}{x^3}>6$." 问题是从"优化结论"这一角度来看，似乎是一种改进，但伴随这一改进而来的是题目难度的加强和解题步骤的增多，如果联系安排这一例题的教学目的是直接运用基本定理"若 a，b，$c>0$，则 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$"，那么这种结论的优化，就并非是绝对可取的.我们必须认识到，从教学条件出发，把"优化结论"看成一个绝对的信条，可能会将人们引进死胡同.仍以本题为例，将结论进一步改为"$x^2+2x+\frac{4}{x^3}>6.05$"，命题依然为真，但是难度就增加许多，实际上，由于函数 $x^2+2x+\frac{4}{x^3}$ 的极小值虽然存在，但不能用根式表示，所以要获得本题的最优结论是困难的.

第六节 叙述必须是清楚的

作为叙述不清而发生歧义的例子，除前面提到外还可举出

[1]《辽宁教育》1980 年第 10 期发表解振连《由例 8 想到的》一文，此后八年间全国各杂志曾发表十余篇文章，对"例 8"展开讨论，兼及对符号"$\leqslant$"的理解.

1978 年全国高考理科数学第五题:

【例 20】 已知 $\triangle ABC$ 的三内角的大小成等差数列, $\operatorname{tg}A\operatorname{tg}C=2+\sqrt{3}$, 求角 A, B, C 的大小.

按原意应指出"A, B, C 的大小成递增的等差数列", 但题中却出现了"三内角的大小成等差数列"这样模糊的措词. 这种不清楚的叙述势必引导学生就三内角成等差数列的不同情况进行讨论, 从而违背了命题者的原意, 并给考试评分工作带来不必要的麻烦.

这里要特别指出, 对于某些所谓实际问题, 叙述的清晰性是至关重要的, 否则, 当我们欲将这些问题数学化的时候, 将会遇到难以克服的困难.

【例 21】 用油漆涂 100 个圆台形水桶, 桶口直径为 30 cm, 桶底直径为 25 cm, 母线长是 27.5 cm; 已知每平方米需要油漆 150 g. 共需油漆多少 kg? (高级中学课本《立体几何(乙种本)》第 80 页, 人民教育出版社 1983 年 12 月第 1 版)

本题有两处未叙述清楚: (1) 水桶是否有盖? (2) 是一面涂油漆还是内外两面涂油漆?

【例 22】 已知 $\log_{18}9=a$, $18^b=5$. 求 $\log_{36}45$.

从要求来看, 本题显然是计算题. 但 $\log_{36}45$ 是个已知数, 即使要用小数来表示它, 也不必依赖已知条件. 利用 $\lg 2\approx 0.3010$, $\lg 3\approx 0.4770$, 并且 $\log_{36}45=\frac{\lg 45}{\lg 36}=\frac{(1-\lg 2)+2\lg 3}{2(\lg 2+\lg 3)}$, 就可求得 $\log_{36}45$ 用小数表示的近似值. 然而, 这样的解法并不符合命题的原意, 所谓"求 $\log_{36}45$"应该理解为"用 a, b 表示 $\log_{36}45$"才好. 不过即使作如是的理解, 其答案也将是多样化的:

$$\log_{36}45=\frac{a+b}{2-a}; \qquad \log_{36}45=\frac{a+b}{1+\log_{18}2};$$

....

仅从该题的条件无法确定应取哪一个. 由此可见, 本题的叙述是

不清楚的. 为了避免引起歧义，最好是将本题改为证明题，并取形式较简的作为求证的结论. 如

已知 $\log_{18}9=a$, $18^b=5$. 求证：

$$\log_{36}45=\frac{a+b}{2-a}.$$

第七节 要求必须是可行的

学生的学习具有一定的阶段性，在某一阶段中，所掌握的知识和技能有一定的局限性，因此数学习题的要求必须考虑到可行性.

数学习题不能超越教学大纲，不能超越学生可能具有的知识和技能的界限.

【例23】 求函数$y=\frac{1}{x^2-3x+2}$的最大值或最小值，并求当函数取得最大值或最小值时的 x 值.

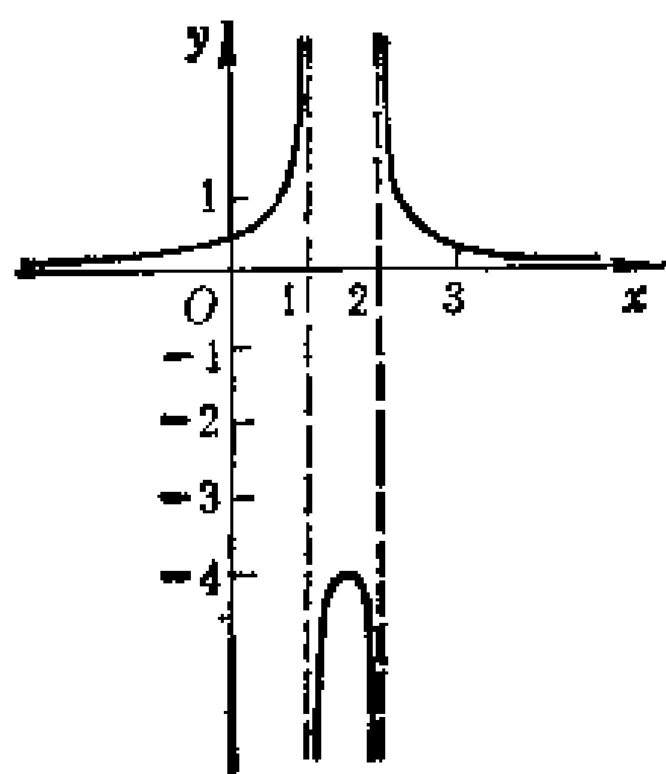


图 3-8

这是某初中复习资料中的一道习题. 在初中阶段学生实际上是将函数的极大值(或极小值)看成最大值(或最小值)的，这对于只限于讨论二次函数的初中生来说，并没有什么不可，但是该题中所涉及的函数是分式函数，它的极大值(或极小值)与最大值(或最小值)不能混为一谈. 实际上，当 $x=\frac{3}{2}$时，函数取极大值 -4，而函数本身是不存在最大值的(见图 3-8). 所以本题混淆了函数的最大值与极大值的概念，超越了学生现阶段所学的知识.

【例 24】 设$f(x)=\sin\left(\frac{kx}{5}+\frac{\pi}{3}\right)$，其中 $k\neq0$，M，m 分别为

$f(x)$ 的极大值、极小值. 试求出最小正整数 k, 使当自变量 x 在任意两个整数间(包括整数本身)变化时, 函数至少有一个值是 M 与另一个值是 m. (1980 年全国高等学校招生理科数学第六题(2))

本题在解答过程中要用到

任意两个整数间 $f(x)$ 至少有一个值 M 与另一个值 $m \Leftrightarrow f(x)$ 的周期 $T \leqslant 1$,

但这并不是显然的, 必须证明, 而这个证明则是学生远不能胜任的, 实际上, 上述关系的成立和 $f(x)$ 中的系数相关联, 如果将 $f(x)$ 改为 $\sin\left(\frac{k\pi x}{5}+\frac{\pi}{2}\right)$, 则函数的极值正好出现在 x 为整数的点上, 这时上述关系就不成立, 实际上 $T \leqslant 1$ 是"任意两个整数间 $f(x)$ 至少有一个值是 M 与另一值是 m"的充分条件而非必要条件. (张方盛、朱霞光 1980)

当谈到数学习题的可行性要求的时候, 我们不能不提到下列著名的题目, 并从中吸取历史的教训.

解方程: $x^x = x$.

这道习题最早见于 1957 年出版的余元庆、魏群、吕学礼编的《高中代数第二册》第 109 页. 该书则是从(苏)诺范塞洛夫《代数与初等函数》(张禾瑞、孙永生译本第 392 页, 高等教育出版社 1954 年 9 月上海第 1 版)引进的. 由于诺氏的原著曾经错误地认为 -1 不是方程的根: "因为 -1 原不在函数 x^x 的定义域内", 因此从 1959 年起就有不少文章对这个方程的解法、在教学中的要求等问题开展广泛的讨论, 较有代表性的是文[1],[2],[3], 但是这些讨论毕竟都超出了中学教学大纲的要求, 因此这道习题就不可避免地被人们所

[1] 芝原《指数方程 $x^x=x$ 的解法》,《数学通报》1959年第 5 期.

[2] 荪体繁《也谈方程 $x^x=x$ 的解》,《教学与研究(中学数学)》1980 年第 4 期.

[3] 张孟贤、卫广彦《浅谈幂指方程 $x^x=x$ 的解》, 《中学数学教学》1981 年第 2 期.

摒弃.

我们还要避免对数学习题作过于繁琐甚至是学生力所不及的讨论，这种情况特别容易在带字母系数的题目中出现.

【例 25】 解方程组:

$$\begin{cases} lx=my=nz; \\ ax+by+cz=d. \end{cases}$$

（全日制十年制高中课本《数学第三册》第 42 页，人民教育出版社 1979 年 4 月第 1 版）

本题有七个字母系数，讨论时要分为四个层次，情况过于复杂，课本在再版时，增添了条件："$amn+bnl+clm\neq 0$"，就避免了上述缺陷.

以上所议的关于数学习题科学性的六条标准，其中第一、二、三、五各条是绝对标准，任何数学习题都必须遵守；第四、六两条是相对标准，有待于教学中根据实际情况适当处理.

第四章　数学习题的编制

编制习题是数学教师必备的一项基本功，数学教师在备课、教学、考试命题和从事教学研究的过程中经常需要改造旧题，创造新题，编制出各种例题、练习题、思考题和试题．同时，在数学教学中，教师指导学生编题，不但可以使学生加深对解题思想方法的理解，掌握典型题目的解题规律，而且可以培养学生的创造性思维能力．

编制数学习题要遵循三条原则：

1．目的性原则．数学习题的形式、内容和难度都是以不同的教学目的而异的．如为了即时巩固知识和技能，应编制收敛性题；为了深化对知识的理解、培养学生的创造能力，应编制发散性题和开放题．选择题有利于扩大知识的覆盖面，但选择题可以随机解答，因此在鉴定具有特异数学素质的优秀生时必须慎用．

2．科学性原则．数学习题应该表述清晰，要求明确，符合第三章中所确立的科学性六条标准．对于开放性题，应允许出现条件不足的情形，但题目本身仍应叙述清楚，有明确的要求，以便学生根据情境，自设条件，分别情况得出结果．

3．和谐美原则．数学习题应该使学生得到美的陶冶，体现严谨、简洁和统一的数学美，激起学生追求真、善、美的愿望，培养学生学习数学的兴趣，引导学生探索数学王国的奥秘．

我们常常可以看到一些结构巧妙、形式优美、难度各异的好题，如

1．证明恒等式

$$\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha.$$

2．分解因式：a^5+a^4+1.

3．若实数 a_1, a_2, a_3, a_4 满足

$$(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2(a_1+a_3)a_4+a_2^2+a_3^2=0,$$

其中$a_2\neq 0$，求证a_1, a_2, a_3成等比数列，且公比为a_4．（上海市1978年数学竞赛试题）

这些题目都是怎样编制出来的呢？是由成题改造而得的吗？当然不尽然．中学数学中的成题不可胜数，这是前人经验的积累，劳动的结晶，我们要学习钻研，但是我们不应限于照搬照抄，故步自封，特别是在考试中，如果一味照搬成题，就难以准确地评价学生的水平，因此教师必须具备编制习题的能力，掌握独立地创造新题的方法．

1947 年匈牙利数学竞赛中有一个题目："任何六个人中，总可以找到三个相互认识的人或三个相互不认识的人．"此题是图论中拉姆赛（Ramsey）数的最简单情形，即 $r(3, 3)=6$．以后几十年中，这个题目被各国杂志转载，波兰、美国等不少国家反复变形，加以运用．1964 年第六届国际数学奥林匹克还将其推广情形编成试题①．可以说，这个题目的出现，对于现代数学奥林匹克试题风格的形成产生了巨大的影响．由此可见，一个好的题目，它的作用是很大的．要编出好的题目，数学教师必须具备：(1)广博的知识．不仅谙熟初等数学，而且对高等数学也有较高的造诣．不仅精通数学，而且对于自然科学、哲学和社会科学也有广泛的了解；(2)良好的思维品质．即思维的广阔性、多向性，灵活性、深刻性和求异

---

① 指该年试题中的第四题："17个科学家中的每一个和其余科学家都通信．在他们的通信中仅仅讨论 3 个题目，而任两个科学家之间只讨论 1 个题目．证明：其中至少有三个科学家，他们互相通信中讨论的是同一个题目．"

性．要善于想象，从不同角度去思考问题，防止思维定势．(3)熟悉编制数学习题的基本方法和技巧．

第一节 演 绎 法

演绎法是一种从一般的真命题或一组条件出发，通过逻辑推理编制数学习题的方法．

【例1】 考虑乘法公式

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3.$$

令 $a=\frac{x}{2}, b=\frac{2y}{3}$，得题：

计算： $$\left(\frac{x}{2}+\frac{2y}{3}\right)\left(\frac{x^2}{4}-\frac{xy}{6}+\frac{4y^2}{9}\right).$$

$\left(\text{答：} \frac{x^3}{8}+\frac{8y^3}{27}.\right)$

【例2】 考虑直角三角形内切圆半径公式：

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c),$$

其中 a, b, c 分别表示直角三角形的两条直角边和斜边．令 $a=5$，$b=12$，得题：

已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=12$，$BC=5$，求 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 r．

（答：$r=2$．）

【例3】 考虑三角恒等式

$$\sin 3\alpha \sin^3\alpha+\cos 3\alpha \cos^3\alpha=\cos^3 2\alpha.$$

令 $\cos 2\alpha=\frac{1}{4}$，得题：

已知 $\cos 2\alpha=\frac{1}{4}$，求 $\sin 3\alpha \sin^3\alpha+\cos 3\alpha \cos^3\alpha$．

$\left(\text{答：} \frac{1}{64}.\right)$

以上这些题目是从已知真命题出发，就其中的某些量适当赋值，所编制的题目适合进行命题的强化训练.

【例4】 考虑关于自然数 n 的公式

$$\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cdots+\cos(2n-1)\alpha}=\operatorname{tg} n\alpha.$$

分别令 $n=2, 3$，得题：

证明恒等式：

1. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

2. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg} 3\alpha$.

【例5】 考虑关于自然数 n 的不等式

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}>2(\sqrt{n+1}-1).$$

令 $2(\sqrt{n+1}-1)=1988$，于是有 $n=990024$. 得题：

证明：$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{990024}}>1988$.

编制如例4、例5这类数学习题，要求教师掌握更多的关于自然数 n 的公式，此类公式在代数、组合、三角、数论等领域内为数甚多.

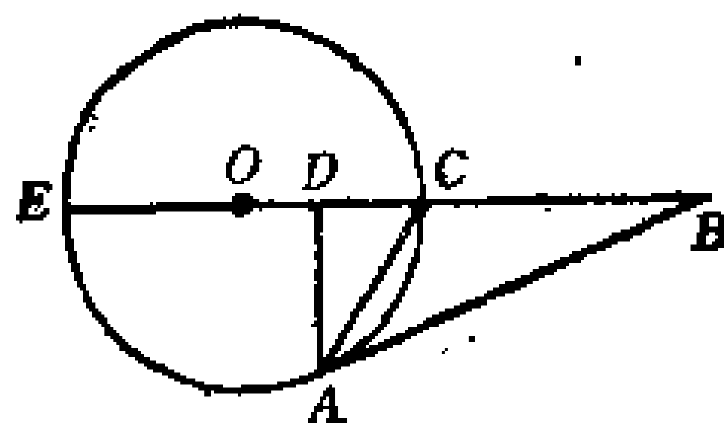


图 4-1

【例6】 考虑基本图形：BA 切圆 O 于点 A，BO 及其延长线分别交圆 O 于点 C，E，$AD\perp BO$ 并交 BO 于点 D，连结 AC（图4-1）. 我们可以通过演绎，依次得到以下各结论：

1. $\angle CAD=\angle CAB$;

2. $AD:DC=AB:BC=ED:AD$;

3. $BC:BC=OD:CO=BD:BE$.

分别取上述结论中的一个或数个，就可编制出不同难度的习题.

又若取某个结论，如 $BC:BO=CD:CO$，将其数量化：设 $BC=p$，$CD=q$，则可编制出计算题：

BA 切圆 O 于点 A，连结 BO 交圆 O 于 C，$AD\perp BO$ 并交 BO 于点 D，$BC=p$，$CD=q$，求 OC.

$\left(答：OC=\dfrac{pq}{p-q}.\right)$

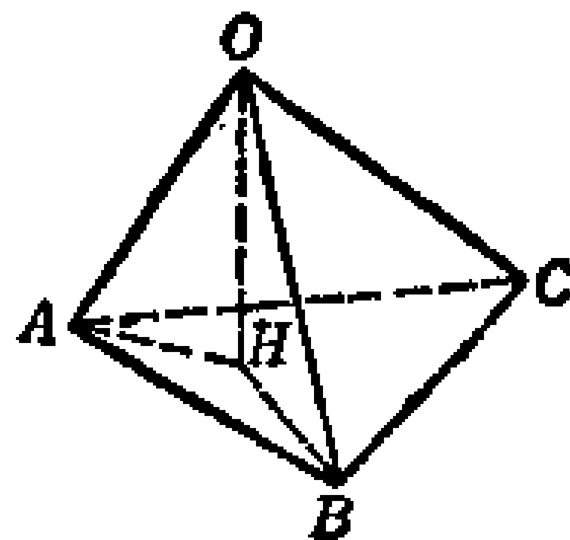


图 4-2

【例 7】 考虑基本图形：三棱锥 $O-ABC$，其侧棱 OA，OB，OC 两两垂直(图4-2). 于是我们可以得到以下结论：(褚学璞, 1985)

1. 它的三个侧面 OAB，OBC，OCA 两两垂直；

2. 底面 ABC 是锐角三角形；

3. 顶点 O 在底面的射影 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心；

4. $\triangle OAB$ 的面积是 $\triangle HAB$ 的面积和 $\triangle ABC$ 的面积的比例中项；

5. 底面积的平方等于各侧面积的平方和；

设 $OA=a, OB=b, OC=c$，$OH=h$，则有

6. $\triangle ABC$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$；

7. $\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}$；

8. $h=\dfrac{abc}{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$；

9. $h\leqslant\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sqrt[3]{abc}$；

(此式当 $a=b=c$ 时取等号)

设 θ，φ，ψ 分别为高与各侧棱所成的角(或底面与各侧面所成二面角的平面角)，则有

10. $\cos^2\theta+\cos^2\varphi+\cos^2\psi=1$;

11. $\sin^2\theta+\sin^2\varphi+\sin^2\psi=2$;

12. $\cos\theta\cos\varphi\cos\psi\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}$;

13. $\sin\theta\sin\varphi\sin\psi\leqslant\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

以上两例说明，通过一个基本图形(有时可添加辅助线)，可以逐步演绎得到许多结论，这样就可编制出一些习题. 这种演绎方法也可以实施于其他的数学模型，如一个集合，一个关系，等等.

第二节 基本量法

在一个问题系统中，存在着 n 个量，使其余所有的量都可以用这 n 个量来表示，而这 n 个量中的任何一个都不能用其他 $n-1$ 个量来表示，我们就称这 n 个量为基本量.

基本量也就是问题系统中独立取值的量. (侯文超，1981)

通过给出基本量来编制数学习题的方法叫做基本量法.

如三角形中有许多量：3 条边，3 个内角，3 条高，内切圆半径，外接圆半径，等等. 其中基本量是 3 个. 如给出三边或是两个内角及外接圆半径可以将其他所有的量都表示出来，所以我们说三角形的基本量的个数是 3.

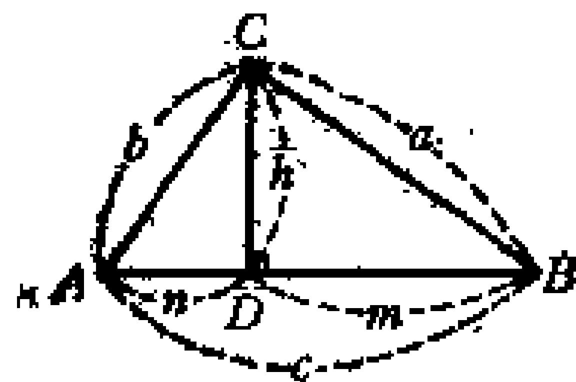


图 4-3

又如图 4-3，CD 是 Rt$\triangle ABC$ 斜边 AB 上的高，令 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，$CD=h$，$BD=m$，$AD=n$. 则系统$\{a, b, c, h, m, n\}$的基本量的个数是 2. 从方程的角度来看问题，关于 a, b, c, h, m, n 这 6 个元素，我们有

$$a^2=cm; \quad ①$$

$$b^2=cn;\qquad ②$$

$$m+n=c;\qquad ③$$

$$mn=h^2;\qquad ④$$

$$a^2+b^2=c^2;\qquad ⑤$$

$$h^2+m^2=a^2;\qquad ⑥$$

$$h^2+n^2=b^2;\qquad ⑦$$

$$ch=ab.\qquad ⑧$$

在系统{①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧}中独立的元素是4个，譬如说①, ②, ③, ④. 实际上

⑤可以由①, ②, ③导出;

⑥可以由①, ③, ④导出;

⑦可以由②, ③, ④导出;

⑧可以由①, ②, ④导出.

而对于方程组: ①, ②, ③, ④, 任意给定6个元素中的两个，就可以求出其余4个. 这也说明了系统{a, b, c, h, m, n}的基本量的个数是2.

【例8】 已知CD是$Rt\triangle ABC$斜边AB上的高，$AC=20$, $DB=9$, 求AB, BC, CD, AD.

解: 设$AD=x$, 则有

$$20^2=(x+9)\cdot x,$$

即
$$x^2+9x-400=0,$$

$$(x-16)(x+25)=0,$$

$\because\ x+25>0,$

$\therefore\ x-16=0,$

于是得 $AD=16$.

又
$$AB=AD+DB=16+9=25;$$

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{25^2-20^2}=15;$$

$$OD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{20\times15}{25}=12.$$

下面列出一些问题系统的基本量个数：

问题系统	元素	基本量个数
三角形	三边、三内角、三高、内切圆半径等	3
等腰三角形	底边、腰、三内角、三高、内切圆半径等	2
直角三角形	三边、二锐角、三中线、内切圆半径等	2
等边三角形	边、高、内切圆半径等	1
四边形	四边、四内角、二对角线等	5
平行四边形	四边、四内角、二对角线等	3
梯形	四边、四内角、中位线等	4
直角梯形	四边、与底斜交的腰上二内角、中位线等	3
等腰梯形	二底、腰、四内角，中位线等	3
菱形	边、四内角、内切圆半径等	2
矩形	四边、二对角线、对角线交角等	2
正方形	边、对角线、外接圆半径等	1
正 n 边形（n 为已知，下同）	边、内切圆半径、角、各对角线等	1
圆	半径、直径等	1
扇形	半径、中心角、弧等	2
三棱柱	底面各边、侧棱、各二面角等	6
直三棱柱	底面各边、侧棱、各二面角等	4
正三棱柱	底面的边、侧棱等	2
三棱锥	各棱、各面上三角形的角、各二面角等	6

（续表）

问 题 系 统	元 素	基本量个数
正三棱锥	底面的边、侧棱、高、斜高等	2
正四面体	棱、内切球的半径等	1
三棱台	各棱、各面上多边形的角、各二面角等	7
正三棱台	两底面的边、侧棱、高、斜高等	3
四棱柱	底面各边、侧棱、各二面角等	8
直四棱柱	底面各边、侧棱、各二面角等	6
正四棱柱	底面的边、侧棱等	2
平行六面体	相交于一个顶点的三条棱、对角线等	6
直平行六面体	相交于一个顶点的三条棱、对角线等	4
长方体	长、宽、高、对角线等	3
正方体	棱、对角线等	1
正 n 棱柱	底面的边、侧棱等	2
正 n 棱锥	底面的边、侧棱、高、斜高等	2
正 n 棱台	两底面的边、侧棱、高、斜高等	3
球	半径、直径、大圆周长等	1
球 缺	底面半径、高、原球半径等	2
等差数列	a_1, n, a_n, d, S_n 等	3
等比数列	a_1, n, a_n, q, S_n 等	3
正比例函数 $y=kx$	k，函数图像上的点 (x_1, y_1) 等	1
反比例函数 $y=k/x$	k，函数图像上的点 (x_1, y_1) 等	1
二次函数 $y=ax^2+bx+c$	a, b, c, x_1, x_2，顶点横坐标，极值等	3

(续表)

问题系统	元素	基本量个数
直线 $Ax+By+C=0$	A, B, C,斜率,倾斜角,截距.直线上的点(x_1, y_1)等	2
圆 $x^2+y^2=r^2$	r,圆周上的点(x_1, y_1)等	1
圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$	D, E, F,半径,圆心横、纵坐标等	3
椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	a, b, c, e 等	2
双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	a, b, c, e,渐近线的斜率等	2
等轴双曲线 $x^2-y^2=a^2$	a, c,曲线上的点(x_1, y_1)等	1
抛物线 $y^2=2px$	p,焦点横坐标等	1
二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$	A, B, C, D, E, F 等	5
圆锥曲线 $\rho=\frac{ep}{1-e\cos\theta}$	e, p,曲线上的点(ρ_1, θ_1)等	2
等速螺线 $\rho=a\theta$	a,曲线上的点(ρ_1, θ_1)等	1
正弦曲线 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$	A, ω, φ, T 等	3
复数 $z=a+bi$	a, b, r, θ 等	2

用基本量法编制数学习题的步骤是:

1. 考虑所关心的问题系统的元素. 例如我们所关心的问题系统是“二次函数 $y=ax^2+bx+c$”,其元素有 a, b, c, x_1, x_2,顶点横坐标,极值等;

2. 确定该问题系统的基本量个数,给出基本量的预期数值.

二次函数的基本量为 3 个，如 a, b, c. 考虑到为使 $y=0$ 的根 x_1, x_2 是较为简单的整数，并曲线的开口向上，取 $a=1, b=-1, c=-6$，即所求的二次函数为 $y=x^2-x-6$；

3. 设计条件. 当确定某些量为问题系统的基本量之后，一般我们并不直接给出这些量，而是设计求出这些量的若干条件. 条件的个数等同于基本量的个数. 如对于函数 $y=x^2-x-6$ 可设计下列条件：

(1) 函数图像过点 $(0, -6)$；

(2) 函数图像过点 $(-2, 0)$；

(3) 函数图像过点 $(2, -4)$；

(4) 函数图像的对称轴为 $x=\frac{1}{2}$ $\left(\text{或顶点的横坐标为}\frac{1}{2}\right)$；

(5) 函数的极小值是 $-\frac{25}{4}$；

(6) 方程 $y=0$ 的两根的平方和为 13；

(7) 方程 $y=0$ 的两根的立方和为 19；

(8) 函数图像与横轴的两个交点之间的距离为 5.

4. 构筑题目. 如在上述 8 个条件中取 3 个可能构筑成一个题目，也就是说可能构筑成 $C_8^3=56$ 个题目. 但实际上由于取定的条件组中的 3 个条件必须要求是独立的，因此能够构筑成的题目要少于 56 个. 如条件组((6), (7), (8)), ((2), (4), (8))中的 3 个条件就不是独立的. 现在取条件组((4), (5), (7))，并将条件(5)修改为“函数的极大值是 25”(记为(5′)). 由条件组((4), (5′), (7))构筑成以下题目：

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$，当 $x=\frac{1}{2}$ 时有极大值25，又方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根的立方和为 19，求这个二次函数. (1964 年北京市中学生数学竞赛高中二年级组第一试第 4 题)

5. 审定. 审定所构筑的题目是否可行，其难度是否适当，是

否满足预期的要求．如取条件组((3)，(6)，(7))，构筑的题目就要涉及解二元三次方程组，所以是不可行的．

用基本量法编制数学习题可以广泛地适用于众多的问题系统．

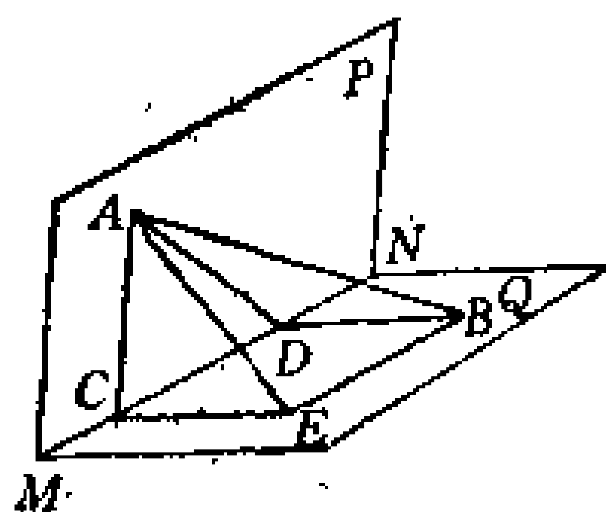


图 4-4

【例 9】 考虑图 4-4，二面角 P-MN-Q 的两个面 P 和 Q 内分别有点 A 和 B，在平面 P 内 $AC\perp MN$，C 为垂足，在平面 Q 内$BD\perp MN$，D 为垂足，$BDCE$ 为矩形，则$\angle ACE$ 为二面角 P-MN-Q 的平面角．设$AC=a$，$BD=b$，$CD=c$，$AB=l$，$\angle ACE=\varphi$，则在问题系统$\{a, b, c, l, \varphi\}$中基本量的个数是 4．现取 $a=2$，$b=4$，$l=10$，$\varphi=120°$，构筑成以下题目：

在 120° 的二面角 P-MN-Q 的两个面 P 和 Q 内有点 A 和 B，已知点 A 和点 B 到棱 MN 的距离分别为 2 和 4，且线段 $AB=10$．(1)求直线 AB 和棱 MN所成的角；(2)求直线 AB 和平面 Q 所成的角．(1981年全国高等学校招生理科数学第八题)

第三节 倒推法

倒推法是先给出题目预期的结果，由此结果出发，倒推出所需的条件的一种编制数学习题的方法．

倒推法是一种极有成效的编题方法，在上一节中有关二次函数的习题的编制过程中就用了倒推法．下面通过例子来说明这种方法的应用．

【例 10】 按预定结果$(x-y+1)(x+2y-1)$编制一道因式分解题．

因为$(x-y+1)(x+2y-1)=x^2-2y^2+xy+3y-1$，所以得到题目：

分解因式　$x^2-2y^2+xy+3y-1$。

【例 11】　要求编制一道因式分解题，已知多项式呈$a^5+pa^4+qa^3+ra^2+sa+1$的形式，这里的系数p, q, r, s中希望出现较多的零，而所得的结果有因式(a^2+a+1)。

根据上述要求，可以设结果中的另一个因式为(a^3+xa^2+ya+1)。考虑$(a^3+xa^2+ya+1)(a^2+a+1)=a^5+pa^4+qa^3+ra^2+sa+1$。从而得

$$p=x+1;$$
$$q=x+y+1;$$
$$r=x+y+1;$$
$$s=y+1.$$

为使p, q, r, s中出现较多的零，可取$x=0, y=-1$，或$x=-1, y=0$，譬如说取前者，就得有$p=1$，$q=r=s=0$。于是得到题目：

分解因式　a^5+a^4+1。

【例 12】　要求编题：求四次多项式的值，而当$x=3-2\sqrt{2}$时该多项式的值为1。

考虑$3-2\sqrt{2}$的共轭根式$3+2\sqrt{2}$，这两个根式是方程$x^2-6x+1=0$之根，因此我们可以任取一个二次式，如x^2+2，当$x=3-2\sqrt{2}$时，必有

$$(x^2-6x+1)(x^2+2)+1=x^4-6x^3+3x^2-12x+3=1.$$

于是得到题目：

已知$x=3-2\sqrt{2}$，求$x^4-6x^3+3x^2-12x+3$的值。

从编制的过程中我们也可找到本题的解法：由$x^2-6x+1=0$，得$x^2-6x=-1$，从而

$$
\begin{aligned}
&x^4-6x^3+3x^2-12x+3\\
&=x^2(x^2-6x)+3x^2-12x+3\\
&=-x^2+3x^2-12x+3\\
&=2(x^2-6x)+3\\
&=2\times(-1)+3=1.
\end{aligned}
$$

【例 13】 编制一道包含一个根 $x=3$ 的根式方程.

写出一个含有一个或几个根号的等式, 如: $\sqrt{9}=\sqrt{4}+1$; 按要求 $x=3$, 在上式中引入 x, 如 $\sqrt{9}=\sqrt{4x-3}$; $\sqrt{4}=\sqrt{x+1}$. 得到题目:

解方程 $\sqrt{4x-3}=\sqrt{x+1}+1$.

解此方程可得 $x_1=3$, $x_2=\frac{7}{9}$. 这里的 $x_2=\frac{7}{9}$ 是增根.

【例 14】 编制一道解为 $\begin{cases}x=1+i;\\ y=1-i\end{cases}$ 的二元一次方程组.

设此方程组为

$$
\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1;\\ a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}
$$

则有

$$
\begin{cases}a_1(1+i)+b_1(1-i)=c_1;\\ a_2(1+i)+b_2(1-i)=c_2.\end{cases}
$$

任取 $a_1=1+2i$, $b_1=2+i$, $a_2=1-2i$, $b_2=2-i$, 求出 $c_1=2+2i$, $c_2=4-4i$. 得到题目:

解方程组

$$
\begin{cases}(1+2i)x+(2+i)y=2(1+i);\\ (1-2i)x+(2-i)y=4(1-i).\end{cases}
$$

【例 15】 要求编制一道"列方程解应用题". 题型: 工作量问题. 所列方程, 由分式方程转化为一元二次方程.

考虑工作量问题的基本关系, 设总工作量为 W, 单位时间工作量为 Q, 工作时间为 t. 则有 $W=Qt$, 即 $t=\frac{W}{Q}$. 取 $W=100$, 则

当 $Q=8$ 时 $\quad t=\dfrac{100}{8}=12\dfrac{1}{2}$; ①

当 $Q=3$ 时 $\quad t=\dfrac{100}{3}=33\dfrac{1}{3}$. ②

在上两式的分母中引入未知数 x，并预定 $x=8$，于是有

$$\frac{100}{x}=12\frac{1}{2}; \qquad ①'$$

$$\frac{100}{\frac{x}{2}-1}=33\frac{1}{3}. \qquad ②'$$

②′－①′ 得 $$\frac{100}{\frac{x}{2}-1}-\frac{100}{x}=20\frac{5}{6}. \qquad ③$$

③ 式可转化为 $5x^2-34x-48=0$,

$\therefore \qquad x_1=8, \quad x_2=-\dfrac{6}{5}$.

给 ③ 式以实际意义，得下列应用题:

甲、乙两人同时开始各加工 100 个零件，乙每小时加工的零件数比甲每小时加工的零件数的一半还少 1 个，结果甲所用的时间比乙少 20 小时 50 分钟. 问甲、乙两人每小时各加工多少个零件?

如果将 ③ 式右边的 $20\dfrac{5}{6}$ 分拆成 $5+15\dfrac{5}{6}$，我们就可以在题意中增加些曲折，改述为

甲、乙两人各加工 100 个零件，两人同时开始工作，甲先用 5 小时进行技术革新，然后进行加工，这时乙每小时加工的零件数比甲每小时加工的零件数的一半还少 1 个，结果甲比乙提前 15 小时 50 分钟完成任务. 问甲、乙两人每小时各加工多少个零件?

【例 16】 由关系式 $\pi^2<10$ 编制一道对数不等式的证明题.

$\because \qquad \pi^2<10$,

$\therefore \qquad \log_\pi 10>2$,

即 $$\log_\pi 2+\log_\pi 5>2,$$

$$\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}>2.$$

上式就是一个形式优美的不等式的证明题。

类似地，用倒推法，由 $\pi^3>30$，可编出题目：

证明：$$\frac{1}{\log_2\pi}+\frac{1}{\log_3\pi}+\frac{1}{\log_5\pi}<3.$$

由 $19^2>360$，可编出题目：

证明：$$\frac{3}{\log_2 19}+\frac{2}{\log_3 19}+\frac{1}{\log_5 19}<2.$$

【例 17】 a_1, a_2, a_3, a_4 都是实数，试编制一道题目，其结论是"证明 a_1, a_2, a_3 成等比数列，且公比为 a_4"。

欲证明 a_1, a_2, a_3 成等比数列，必须有 $a_2\neq0$，且 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}$。而当 $a_2\neq0$，且 a_1, a_2, a_3, a_4 都是实数时，"a_1, a_2, a_3 成等比数列，且公比为 a_4"与下式等价：

$$\left(\frac{a_2}{a_1}-a_4\right)^2+\left(\frac{a_3}{a_2}-a_4\right)^2=0.$$

此式展开、去分母、整理得

$$(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2(a_1+a_3)a_4+a_2^2+a_3^2=0.$$

于是得到题目：

若实数 a_1, a_2, a_3, a_4 满足

$$(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2(a_1+a_3)a_4+a_2^2+a_3^2=0,$$

其中 $a_2\neq0$，求证 a_1, a_2, a_3 成等比数列，且公比为 a_4.

【例 18】 递推数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 $S_n=n^2-n+1$. 试编一题.

由 $S_n=n^2-n+1$，可得

$$a_1=S_1=1,$$

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-n+1-[(n-1)^2-(n-1)+1]$$
$$=2(n-1);\ (n\geqslant 2)$$
$$a_{n-1}=2(n-2).\ (n\geqslant 3)$$
$$\therefore\quad a_n-a_{n-1}=2(n-1)-2(n-2)=2.\ (n\geqslant 3)$$

于是得到题目：

已知数列$\{a_n\}$中$a_1=1$，$a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 3)$，求$a_n$，$S_n$.

【例 19】 试以$\alpha+2\beta=\pi$为结论，编制一道三角条件等式的证明题.

$$\text{由}\ \alpha+2\beta=\pi\Rightarrow\alpha=\pi-2\beta$$
$$\Rightarrow\sin\alpha=\sin 2\beta$$
$$\Rightarrow\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha}=\frac{1}{2};\ (\sin\alpha\neq 0)$$
$$\text{又}\ \alpha+2\beta=\pi\Rightarrow\alpha=\pi-2\beta$$
$$\Rightarrow\cos\alpha=-\cos 2\beta$$
$$\Rightarrow\cos\alpha=2\sin^2\beta-1$$
$$\Rightarrow\frac{\sin^2\beta}{1+\cos\alpha}=\frac{1}{2}.\ (\cos\alpha\neq -1)$$

现隐去数值$\frac{1}{2}$，探讨由$\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin^2\beta}{1+\cos\beta}$即$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\beta}$能否证明$\alpha+2\beta=\pi$？事实上，

由$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\alpha}$可得$\frac{\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\beta}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$，即$\frac{\cos\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$，从而有$\cos\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)=0$. 欲使$\alpha+2\beta=\pi$，必须有$-\frac{\pi}{2}<\beta+\frac{\alpha}{2}<\frac{3\pi}{2}$，为简便起见，不妨取$\alpha$，$\beta$都是锐角. 于是得到题目：

已知α,β都是锐角，且$\frac{\cos\beta}{\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{1+\cos\alpha}$，求证$\alpha+2\beta=\pi$.

从上述数例，我们看到，用倒推法编题必须经历由结果上溯条件的过程，在这一过程中，思维的指向常常是不确定的，因此编题者应在发散和收敛之间保持适度的张力．又在这一过程中，变换未必具有等价性，因此所得到的题目，应该审慎地进行反复推敲，以免产生违反科学性的错误．

第四节　变换条件法

变换条件法是将成题的条件加以变换，从而得到新题的一种编制数学习题的方法．

一、等价变换

数学习题是一种关系结构，通过某种对应改变习题中对象的名称，而保留原有的关系，便可得到新题．

在数学发展史上，人们为了解决如欧几里得第五公设的独立性问题、四色问题等这些难题，都曾经找到过和这些问题相等价的命题，试图通过这些等价命题来解决原来的问题．

仍然以匈牙利数学竞赛题为例．

证明任意六个人中，总有三个人相互认识，或者相互不认识．

由于这个题目新颖、别致，所以以后不少国家通过等价变换的方法，竞相运用．如将题目中的六个人看成是空间六个点，以两点间连红线表示两人互相认识，两点间连蓝线表示两人互相不认识，于是这个题目就变成1953年美国普特南数学竞赛的一个试题：

空间中的六点，任三点不共线，任四点不共面，成对地连接它们得十五条线段，用红色或蓝色染这些线段（一条线段只染一种颜色）．求证：无论如何染，总存在同色的三角形．

等价变换的一个常用手段是将一个命题变换为与之等价的逆否命题.

【例 20】 有 10 个成员, 分成 3 个或少于 3 个组, 证明其中至少有一个组有 4 个或 4 个以上成员.

这个题目的等价叙述是:

有 10 个成员, 分成若干个组, 其中没有一个组的成员个数在 4 个或 4 个以上, 证明所分的组数必大于 3.

由于数和形是数学所研究的两类基本对象, 因此在数、形之间互作等价变换, 此常常是构筑新题的一种方法.

【例 21】 当 m 取什么实数时, 一元二次方程

$$(m+1)x^2+(3m-2)x+(1-m)=0$$

有 (1) 两相等实根; (2) 两相异实根; (3) 两同号实根?

此题可用几何语言作等价变换如下:

当 m 取什么实数时, 二次函数

$$y=(m+1)x^2+(3m-2)x+(1-m)$$

的图像与 x 轴 (1) 只有一个公共点; (2) 有两个交点; (3) 有两个交点, 且位于原点的同侧?

将数学习题的部分或全部条件, 用它们相应的等价命题来替换, 也可以构筑新的题目, 用这种方法编制新题, 原题的结论一般可保持不变.

【例 22】 在 $\triangle ABC$ 中,

$$b=5, \qquad ①$$

$$\text{外接圆半径 } R=\frac{7\sqrt{3}}{3}, \qquad ②$$

$$A=60^\circ. \qquad ③$$

求 a, c.

将此题的条件分别作以下变换都可构成新题.

(i) ②③不变，①变为 $c=8$；

(ii) ①③不变，②变为内切圆半径 $r=\sqrt{3}$；

(iii) ③不变，①②变为 $b+c=13$，内切圆半径 $r=\sqrt{3}$.

以上各个变换虽然都是等价的，但是所构成的新题其难度各异．实际上，经过变换(i)所构成的新题，其难度与原题相比较没有什么不同；经过变换(ii)所构成的新题就较原题为难；经过变换(iii)所构成的新题较原题更难．不过所有这些新题都有同样的答案，即 $a=7$, $c=8$(或 $b=5$)．当然通过条件的等价变换编制习题，并不要求新题和原题的答案相同，只是要求具有相同的真假值(对证明题来说)和解的确定性(对求解题来说)．

二、不等价变换

以成题为思考的出发点，将其条件加以变换，又不要求保持变换的等价性，当然可以衍生出许多新题来，由于这种变换并无明确的指向性，因此要进行严格的分类是不可能，甚至作出较为合乎逻辑意义的分类也有极大的困难的．下面介绍几种常用的方法：

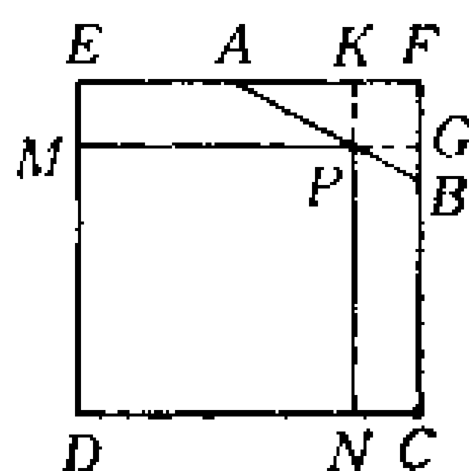


图 4-5

(一) 条件的弱化　去掉某个题目的一些条件，或以较弱的条件来替换原来的条件，就将使原题的结论泛化，如果原题是求解题，其解集必然扩大．

【例 23】 边长为4的正方形 $CDEF$，截去一角成五边形 $ABCDE$，其中 $AF=2$, $BF=1$, P 是 AB 上一点，$AP:PB=2$. 求矩形 $PNDM$ 的面积．

解：延长 NP 交 EF 于 K，延长 MP 交 CF 于 G．可得

$$PG=\frac{1}{3}AF=\frac{2}{3};$$

$$PK=\frac{2}{3}BF=\frac{2}{3}.$$

$\therefore$ 矩形 $PNDM$ 的面积 $= MP\times NP=\left(4-\frac{2}{3}\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)$

$$=11\frac{1}{9}.$$

我们去掉题目中的条件："$AP:PB=2$"，这样矩形 $PNDM$ 的面积就因 P 点在 AB 上的位置不同而变化了．于是得到新题：

边长为 4 的正方形 $ODEF$，截去一角成五边形 $ABODE$，其中 $AF=2, BF=1$，若 P 是 AB 上的一个动点，并将矩形 $PNDM$ 的面积记为 S，求 S 的变化范围．

解：设 $PK=x$，则 $PG=2(1-x)$．

$$\begin{aligned}\therefore\quad S&=MP\times NP\\&=[4-2(1-x)](4-x)\\&=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{2}.\end{aligned}$$

$$\because\quad 0\leqslant x\leqslant 1,$$

$$\therefore\quad 8\leqslant S\leqslant 12.$$

对上述题目，如果进一步提出下列问题，也是饶有兴味的：

(1) S 的最大值、最小值分别是多少？

(2) P 在怎样的位置时 S 的值等于 10？

【例 24】 已知一个圆，其中：

半径等于 3； ①

与另一圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 相切； ②

与直线 $x=-1$ 相切． ③

求此圆的圆心坐标．

此题的答案是：所求圆心坐标为 $(2, 3)$，$(2, -1)$，$(2, 5)$，$(2, -3)$．去掉此题中三个条件中的一个，都可以得到新题．

去掉条件 ①，得：

一圆与圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 及直线 $x=-1$ 都相切，求此

圆的圆心的轨迹方程．（答：$(y-1)^2=8x$；$(y-1)^2=4(x-1)$．）

去掉条件②，得：

半径为3的圆与直线$x=-1$相切，求此圆的圆心的轨迹方程．（答：$x=2$，$x=-4$．）

去掉条件③，得：

半径为3的圆与另一圆$(x-2)^2+(y-1)^2=1$相切，求此圆的圆心的轨迹方程．（答：$(x-2)^2+(y-1)^2=4$，$(x-2)^2+(y-1)^2=16$．）

（二）条件的强化　在某个题目中增加一些条件，或以较强的条件替换原来的条件，可以构筑新题．但是这种通过强化条件编制新题的做法，并不是对每个题目都是可施行的．我们把存在矛盾条件的习题称为条件过饱和习题，如

已知$\triangle ABC$中$A=40°$，$B=60°$，$a:b=4:5$，求c．

又如第三章例10～例16各例都是条件过饱和习题；条件并不矛盾，但若强化任何条件都将产生矛盾的习题，称为条件饱和习题．如

已知$\triangle ABC$中，$A=40°$，$B=60°$，$a=4$，求c．

可以强化条件而不产生矛盾的习题，称为条件不饱和习题．如

解不等式　$x^2+x-6\geqslant 0$．

我们将此题中的条件“$\geqslant 0$”强化为“$=0$”，就得新题：

解方程　$x^2+x-6=0$．

此题仍然是条件不饱和习题，可进一步强化其条件得

若$x\in N$，解方程$x^2+x-6=0$．

条件过饱和习题不合数学习题科学性的要求；条件饱和习题，只能对条件作等价变换，或作弱化处理；只有对条件不饱和习题，才有可能进一步强化其条件，从而编制出新的习题．条件不饱和习题一般具有较强的发散性，有利于培养学生思维的创造性，但是

某些命题之所以为假命题，也往往由于条件不饱和所致，如第三章例 7～例 9.

（三）逆向变换　逆向变换是将数学习题的条件中的事项与结论中的事项作相等个数的交换以构筑新题的一种编题方法.

【例 25】　在 $\triangle ABC$ 中，如果 $A=2B$，那么 $a^2=b(b+c)$.

将此题的条件和结论互换，可得一新题.

在 $\triangle ABC$ 中，如果 $a^2=b(b+c)$，那么 $A=2B$.

在上例中，由于原命题与逆命题均为真，在这种情况下，通过逆向变换编新题当然比较方便，但在不少情况下，原命题为真时逆命题未必为真，因此运用逆向变换方法时，必须注意新题的条件的充分性. 有时在构筑新题时要适当地补充条件.

【例 26】　若 α, β, γ 成等差数列，且 $\operatorname{tg}\gamma=2\operatorname{tg}\beta$，则

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2}.$$

通过逆向变换，我们有两种不同的途径来构筑新题：

(1) 结论"$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2}$"与条件"$\operatorname{tg}\gamma=2\operatorname{tg}\beta$"交换；

(2) 结论"$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2}$"与条件"$\alpha, \beta, \gamma$ 成等差数列"交换.

由 (1) 得：

若 α, β, γ 成等差数列，且 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2}$，则 $\operatorname{tg}\gamma=2\operatorname{tg}\beta$.

这是一个真命题.

由 (2) 得：

若 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2}$，且 $\operatorname{tg}\gamma=2\operatorname{tg}\beta$，则 α, β, γ 成等差数列.

这个命题并不为真. 请看下列推理：

设 $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=t$，则

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma=\frac{t}{1-t^2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{t^3+t}{1-t^4}=\frac{t}{1-t^2}.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}, \qquad ①$$

从而

$$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2},$$

即 α, β, γ 成等差数列.

在上述过程中，由 ① 式到下一步的根据是不充分的. 为使推理能够成立，应补充条件："β, $\frac{\alpha+\gamma}{2}\in\left(k\pi-\frac{\pi}{2}, k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in Z$"，不过这一叙述较为冗长，为使题目简明起见，不妨将补充的条件加强为"$\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$"，即"$\alpha, \beta, \gamma$ 均为锐角"，于是得到新题：

若 α, β, γ 均为锐角，且 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}^3\frac{\gamma}{2}$，$\operatorname{tg}\gamma=2\operatorname{tg}\beta$，则 α,β,γ 成等差数列.

【例 27】 以三角形中位线定理"三角形的中位线平行于第三边，并且等于它的一半"为基础，运用逆向变换方法编制新题. 为了便于叙述，结合图形将命题的条件和结论加以分解：

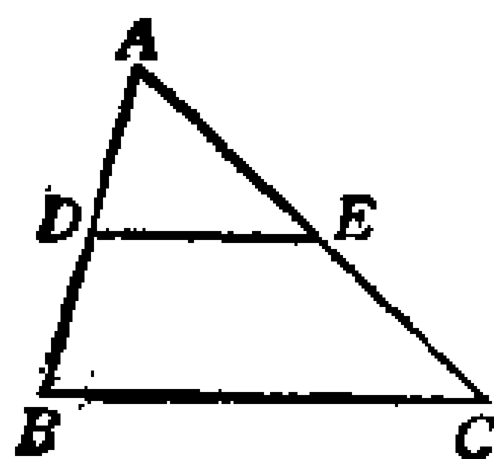


图 4-6

如图 4-6，已知 $\triangle ABC$，D 是 AB 上一点，E 是 AC 上一点，若

$$AD=DB, \qquad ①$$

$$AE=EC, \qquad ②$$

则

$$DE \parallel BC, \tag{③}$$

$$DE=\frac{1}{2}BC. \tag{④}$$

在保持原命题前题"已知 $\triangle ABC$, D 是 AB上一点, E 是 AC 上一点"的情况下, 将条件中的事项 ①, ② 与结论中的事项 ③, ④ 作相等个数的交换, 可得 3 个不同的命题:

①(或 ②)与 ③ 交换, 得

$$\left.\begin{array}{l} DE \parallel BC \\ AE=EC \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} AD=DB, \\ DE=\frac{1}{2}BC; \end{array}\right. \tag{I}$$

①(或 ②)与 ④ 交换, 得

$$\left.\begin{array}{l} DE=\frac{1}{2}BC \\ AE=EC \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} AD=DB, \\ DE \parallel BC; \end{array}\right. \tag{II}$$

①, ② 与 ③, ④ 交换, 得

$$\left.\begin{array}{l} DE \parallel BC \\ DE=\frac{1}{2}BC \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} AD=DB, \\ AE=EC. \end{array}\right. \tag{III}$$

上述 3 个命题中, (I), (III) 是真命题, (II) 是假命题, 因为对于(II), 我们可以举出如图 4-7 的反例, 图中虽有 $DE=\frac{1}{2}BC$, $AE=EC$, 但 $AD\neq DB$, $DE \not\parallel BC$. 欲使(II)为真命题, 可以补充条件"$BC>AB$, $BC>AC$".

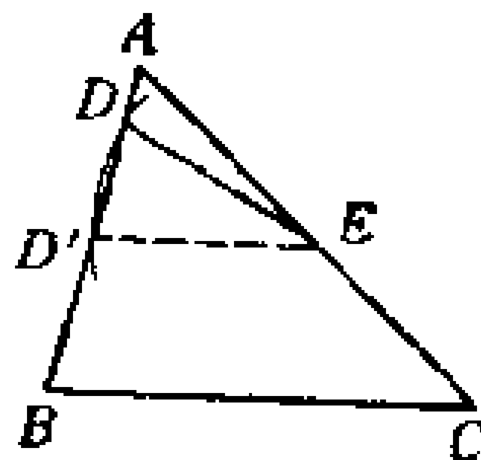


图 4-7

【例 28】 试由题目"证明函数 $y=\sin^2x+\frac{3}{2}\cos x-\frac{9}{16}$ 的最大值为 1", 通过逆向变换编一新题.

研究: 我们不妨固定函数的基本表达形式, 而将函数表达式中

的某个系数，如 $\frac{3}{2}$，换成待定系数(设为 a)，将函数的最大值为1看作已知条件，考虑函数 $y=\sin^2x+a\cos x-\frac{9}{16}$ 最大值为1时 a 的取值．先将函数变形为

$$y=-\left(\cos x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+\frac{7}{16}.$$

(1) 当 $-2\leqslant a\leqslant 2$ 时，$y_{最大}=\frac{a^2}{4}+\frac{7}{16}=1$，由此可得到 $a=\pm\frac{3}{2}$；

(2) 当 $a>2$ 时，$y_{最大}=-\left(1-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+\frac{7}{16}=1$，由此得 $a=\frac{25}{16}$，舍去；

(3) 当 $a<-2$ 时，$y_{最大}=-\left(-1-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+\frac{7}{16}=1$，由此得 $a=-\frac{25}{16}$，舍去．

综合(1)，(2)，(3)可得 $a=\pm\frac{3}{2}$．为使结论确定起见，新题可拟为：

已知函数 $y=\sin^2x+a\cos x-\frac{9}{16}$ 的最大值为1，求证 $a^2=2\frac{1}{4}$．

第五节　类比与推广

数学习题的结论越是一般，所论及的对象越多，其应用的范围就越广．在整个数学发展的过程中人们总是不断地去寻求更多更一般、更普遍的结论，这种倾向也反映到数学习题的构筑过程之中．

一、类比

类比是一种逻辑方法，它是通过两个特殊对象的比较，而作出

其中一个特殊对象的结论，是由此及彼的过程. 用类比法编制习题其模式是：

$$\begin{array}{ll}\text{原题有条件 } a, b, c, & \text{结论 } d \\ \text{新题有条件 } a, b, c', & \\ \hline \text{新题有} & \text{结论 } d'\end{array}$$

这里的新题的条件 c' 和结论 d' 与原题的条件 c 和结论 d 有着对应的相似性，特殊情形下可能有 $d=d'$. 由于类比法得到的结论具有或然性，因此所得的新题其科学性必须经过严格的推敲.

【例 29】 平面上任给四个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比为 λ，证明：$\lambda \geqslant \sqrt{2}$. (1961 年匈牙利数学竞赛试题)

将此题的条件中点的个数改为五个，不改变其他事项，并将结论中的 $\sqrt{2}$ 理解为"正四边形(最短的)对角线与一边之比"，通过类比得到一个对应的结论：$\lambda \geqslant 2\sin 54^\circ$，这里的 $2\sin 54^\circ$ 即为正五边形对角线与一边之比. 于是得到新题：

平面上任给五个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比为 λ，证明：$\lambda \geqslant 2\sin 54^\circ$.

类似地还可得到题目：

平面上任给六个相异的点，它们之间的最大距离与最小距离之比为 λ，证明：$\lambda \geqslant \sqrt{3}$.

由于类比法只要保持原题中的部分条件，同时对条件中的其余事项作适当改变，因此，保持什么？改变什么？怎样改变？对这些问题的回答，无疑是多种多样的，也就是说，凭借编题者思维的灵活性和丰富的想象力. 对于同一个题目，可用类比法得到多个新题.

【例 30】 勾股定理：直角三角形的两个直角边的平方和等于斜边的平方. (图 4-8)

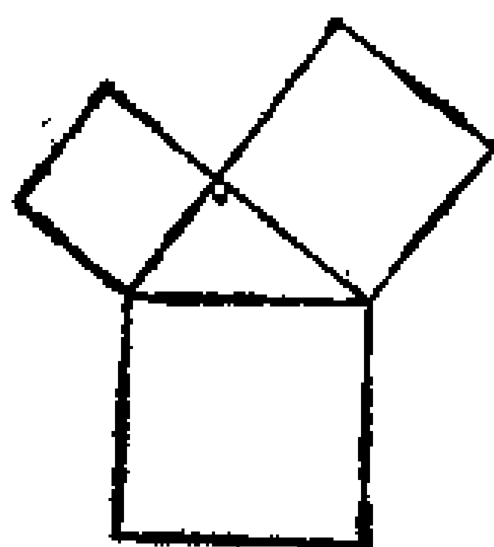


图 4-8

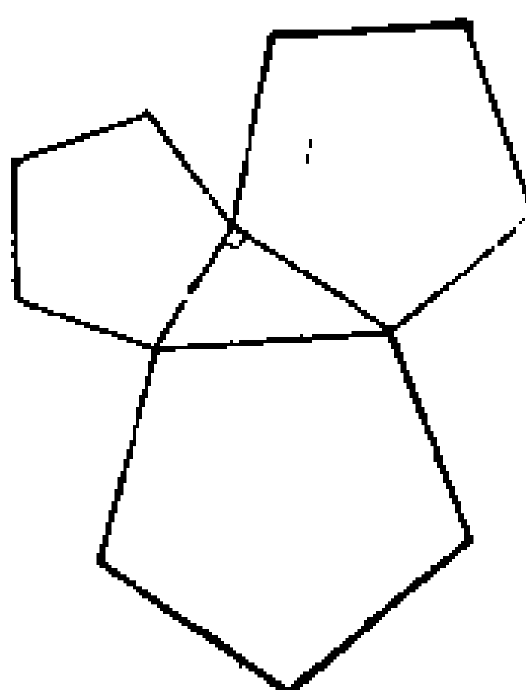


图 4-9

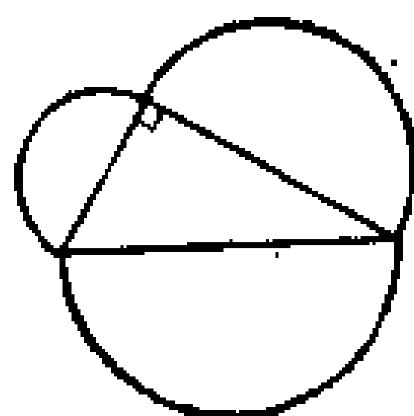


图 4-10

从面积的角度考虑，将勾股定理叙述为：分别以直角三角形的两个直角边为一边的两个正方形的面积的和等于以斜边为一边的正方形的面积(图 4-8)．将题目中的"正方形"改为"正五边形"或"以一边为直径的半圆"，就可得到新题：

分别以直角三角形的两个直角边为一边的两个正五边形的面积的和等于以斜边为一边的正五边形的面积(图 4-9)；

分别以直角三角形的两个直角边为直径的两个半圆的面积的和等于以斜边为直径的半圆的面积(图 4-10)．

从代数式角度考虑，将勾股定理叙述为：若直角三角形的两直角边分别为 a,b，斜边为 c，则 $a^2+b^2=c^2$．将题目中 a,b,c 的指数改为 3，甚至改为 $n(n\in N,\ n\geqslant 3)$，就可得到新题：

若直角三角形的两直角边分别为 a，b，斜边为 c，则：(1)$a^3+b^3<c^3$；(2)$a^n+b^n<c^n$．$(n\in N, n\geqslant 3)$

将平面图形的直角三角形和空间图形顶点处为直三面角(三条棱两两垂直的三面角)的三棱锥相类比，可得题目：

顶点处为直三面角的三棱锥的各侧面面积的平方和等于底面积的平方．

【例 31】 平面上两条直线同垂直于第三条直线，则这两条直线平行．

将"平面上"的问题与"空间"的问题进行类比，其中"两条直线"或改为"两个平面"；"第三条直线"或改为"一个平面"，可得四个命题如下：

(1) 空间两条直线同垂直于第三条直线，则这两条直线平行.(假命题)

(2) 空间两个平面同垂直于一条直线，则这两个平面平行.(真命题)

(3) 空间两条直线同垂直于一个平面，则这两条直线平行.(真命题)

(4) 空间两个平面同垂直于第三个平面，则这两个平面平行.(假命题)

将平面图形中的三角形、平行四边形、矩形、梯形、圆分别与空间图形中的四面体、平行六面体、长方体、台体、球类比，数与形类比，椭圆、双曲线与抛物线相互类比，等等，都是编制数学习题的常用方法.

二、推广

推广是扩大题目的条件中有关对象的范围，或者扩大结论的范围的一种编制数学习题的方法.

一个题目经过推广后，原来的题目就是它的特殊情形，两者具有包含关系，如图4-11.



图 4-11

推广分两种类型.

(一) 概念型　先找出题目的条件或结论中的某个对象，把它作为类概念，然后扩展到与它邻近的种概念.

【例 32】　过抛物线的焦点的弦的中点的轨迹仍为抛物线.

此题可将条件和结论中的对象——抛物线作为类概念，扩展到与它邻近的种概念——圆锥曲线.

（二）数值型　把一个仅对某些自然数成立的命题，推广到对所有的自然数都成立，或者把题目的条件或结论中的某些数值扩展到更一般的情形．

【例 33】 以三角形的顶点和它内部 2 个点(共 5 个点)为顶点作小三角形，问原三角形被分割成几个小三角形？

解：先考虑三角形内部有 1 个点的情况，这时原三角形被分割成 3 个小三角形(图4-12)．

再在三角形内部增添 1 个点，所增添的点可能在上述小三角形中某个小三角形的内部(图 4-13)，也可能在某两个小三角形的共同边上(图 4-14)，但不管是何种情形，都增添了 2 个小三角形，所以原三角形被分割成 5 个小三角形．

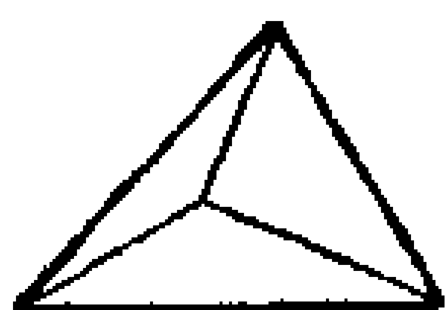


图 4-12



图 4-13

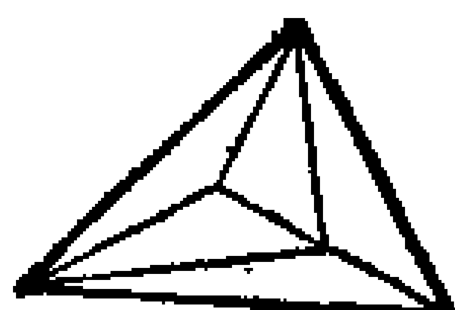


图 4-14

从上述解题过程中可以看到，原三角形内每增添 1 点，就增添 2 个小三角形，因此原题可推广为：

以三角形的顶点和它内部 n 个点(共 $n+3$ 个点)为顶点作小三角形，问原三角形被分割成几个小三角形？(答：$2n+1$ 个小三角形．)

【例 34】 正三角形中任一点 P 到各边的距离之和为定值．

推广一　边相等的凸 n 边形内一点 P 到各边的距离之和为定值．

推广二　角相等的凸 n 边形内一点 P 到各边的距离之和为定值．

【例 35】 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，D 在 AB 上，E 在 AC 的

延长线上，且 $BD=CE$, DE 交 BC 于 F. 求证：$DF=FE$.（图4-15）

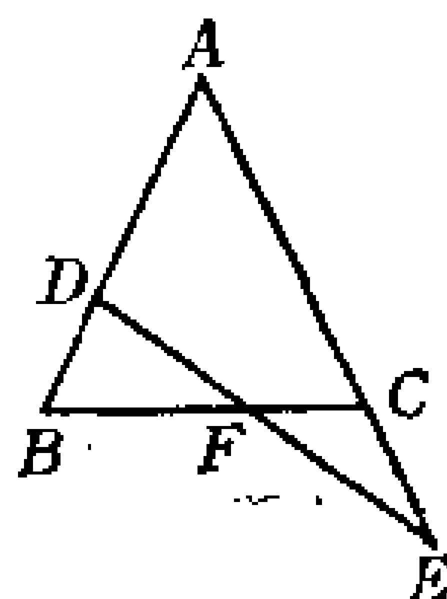


图 4-15

推广一　保留其他条件，使 $BD:CE=\lambda$, 证明 $DF:FE=\lambda$.

推广二　保留其他条件，使 $AC:AB=k$, 证明 $DF:FE=k$.

推广三　保留其他条件，使 $BD:CE=\lambda$, $AC:AB=k$, 证明 $DF:FE=\lambda k$.

由例 34 及例 35 可以看到，由于基点不同，一个题目可能具有多种推广的方向.

第六节　演　　变

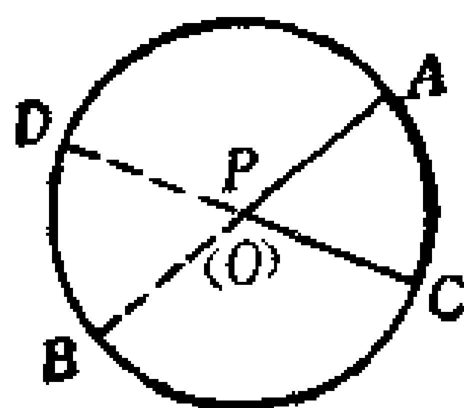
从一道基本题出发，将条件中的数量或图形（包括位置及形状）加以改变，使之产生一些具有新质的题目，这种编制数学习题的方法叫做演变.

客观世界的运动变化，反映在数学里就是数量关系或几何图形的演变. 课本中关于和圆相截二直线交角度量定理，从演变的角度来看，可以说是其顶点从圆内向圆外运动的各种结果.

顶点在圆内（图4-16），有：

圆心角的度数和它所对的弧的度数相等；

圆内角的度数等于它所夹的两弧的度数之和的一半.



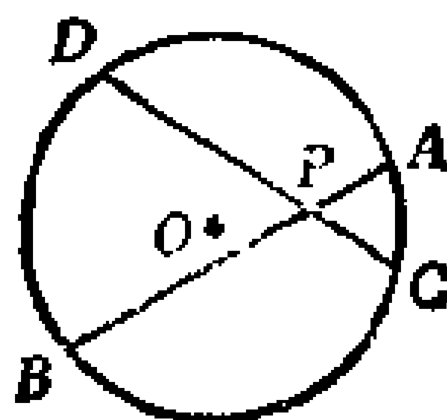


图 4-16

顶点在圆周上(图 4-17),有:

圆周角的度数等于它所对的弧的度数的一半;

弦切角的度数等于它所夹的弧的度数的一半.



图 4-17

顶点在圆外(图 4-18),有

圆外角的度数等于它所夹的两弧的度数之差的一半.

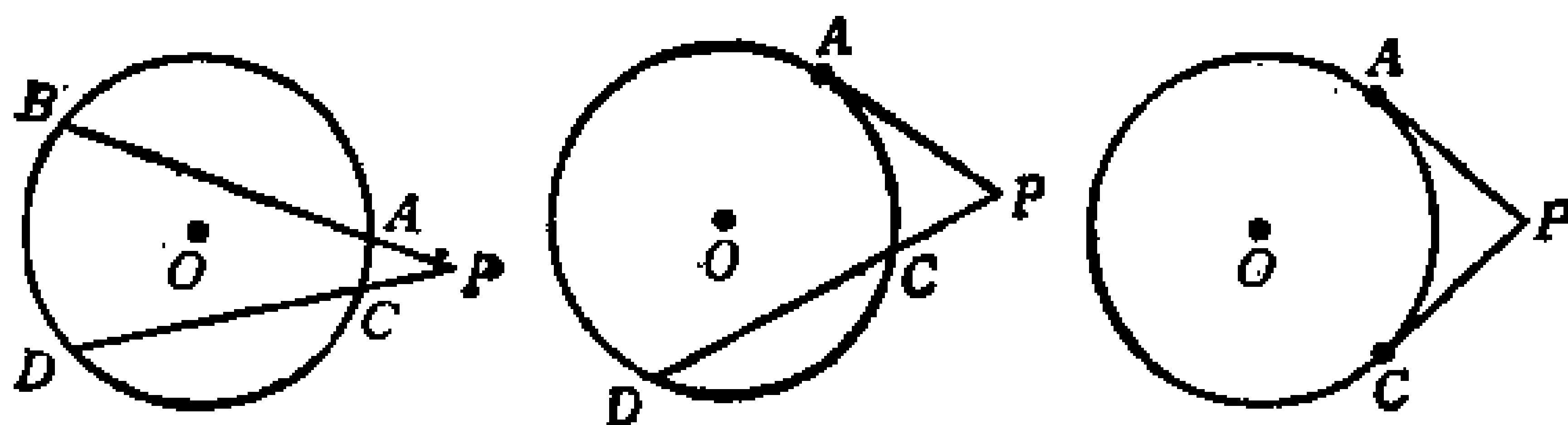


图 4-18

通过演变法编制新题,便于体现新旧题之间的联系,使学生能从整体上去掌握知识和解题方法,不知不觉地进入一个新的高度.

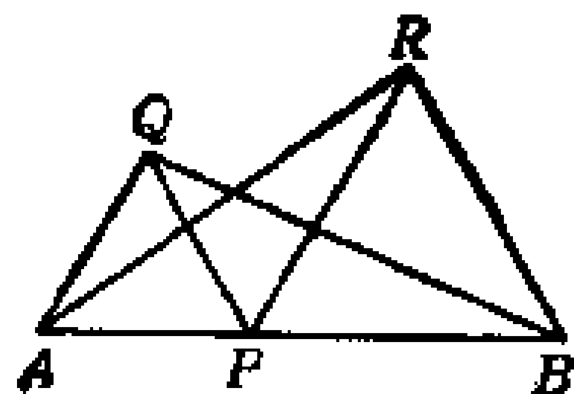


图 4-19

【例 36】 基本题:已知 P 是线段 AB 上一点,分别以 AP, PB 为一边,在 AB 的同侧作等边三角形 APQ 和 PBR. 求证:$AR=BQ$. (图 4-19)

本题经过下列各种演变,原来的结论仍保持不变.

(1) 图形位置的改变

演变一 $\triangle APQ$ 与 $\triangle PBR$ 在 AB 的异侧(图 4-20).

演变二　P 点在 AB 的延长线上(图 4-21).

演变三　P 点在 AB 外(图 4-22).

演变四　$\triangle APQ$ 与 $\triangle PBR$ 在 AB 的异侧，且 P 点在 AB 的延长线上(图 4-23). (演变一和演变二的复合)

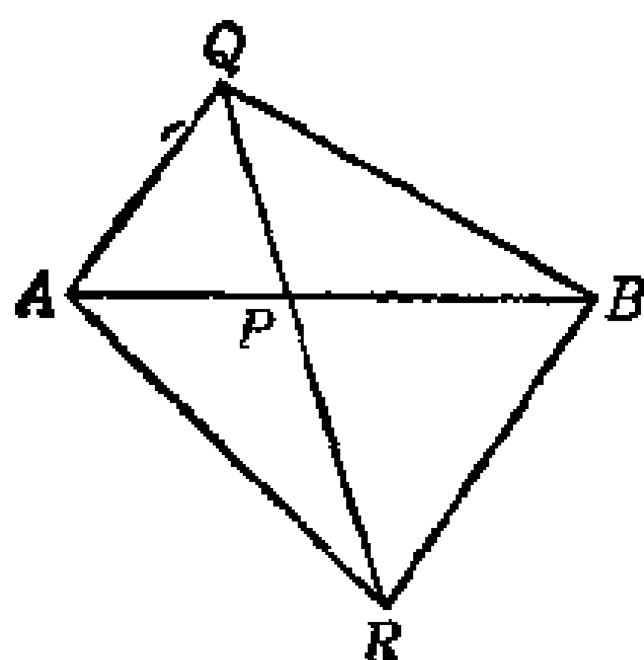


图 4-20

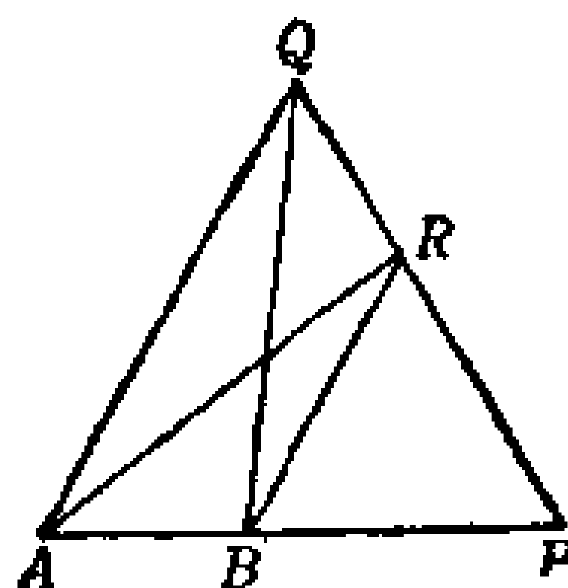


图 4-21

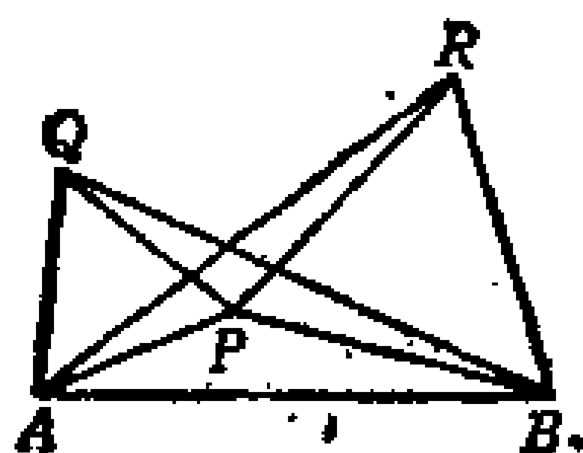


图 4-22

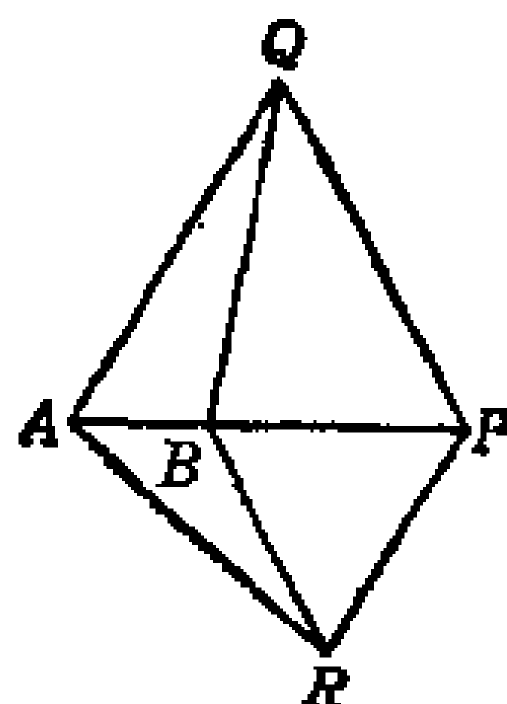


图 4-23

(2) 图形形状的改变

演变五　$\triangle APQ$ 与 $\triangle PBR$ 都改为顶角相等的等腰三角形即 $AP=PQ$, $PB=PR$, $\angle APQ=\angle BPR$. (图4-24)

演变六　$\triangle APQ$ 与 $\triangle PBR$ 分别改为正方形 $APQQ'$ 与正方形 $BPRR'$. (图4-25)

演变七　$\triangle APQ$ 与 $\triangle PBR$ 分别改为正六边形 $APQQ'Q''Q'''$ 与正六边形 $BPRR'R''R'''$. (图4-26)

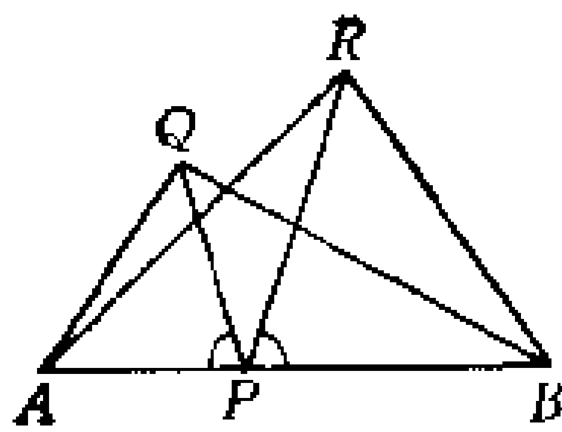


图 4-24

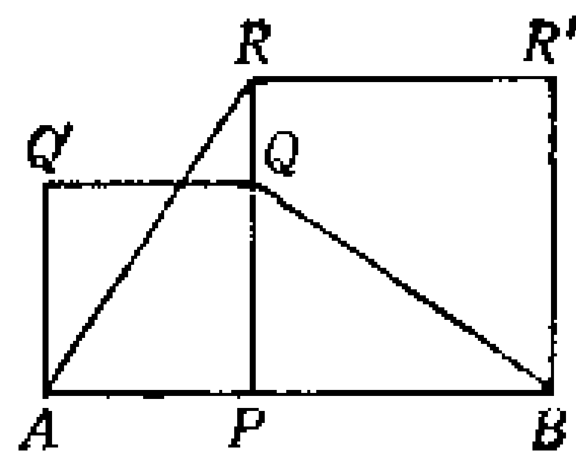


图 4-25

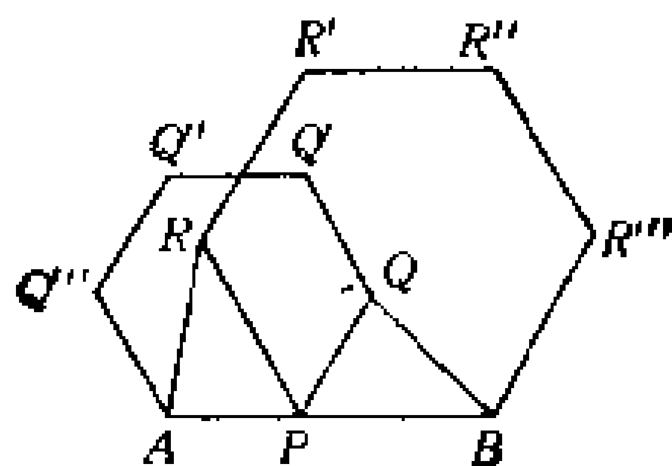


图 4-26

(3) 图形位置的改变与形状的改变的复合

演变八　演变一与演变五的复合.（图 4-27）

演变九　演变一与演变六的复合.（图 4-28）

演变十　演变一与演变七的复合.（图 4-29）

演变十一　演变二与演变六的复合.（图 4-30）

演变十二　演变三与演变六的复合.（图 4-31）

演变十三　演变四与演变六的复合.（图 4-32）

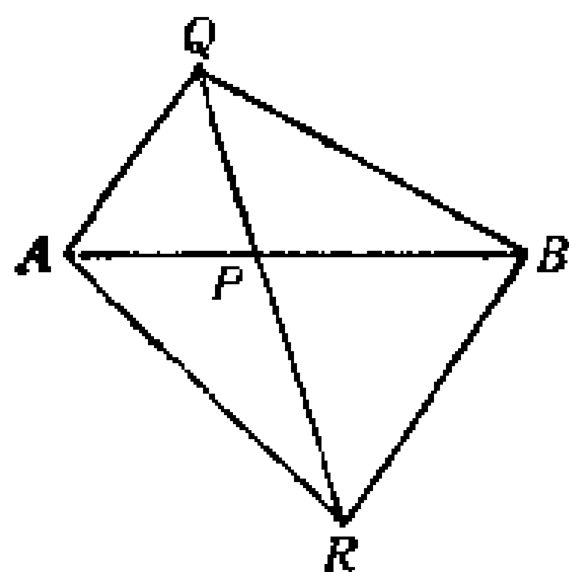


图 4-27

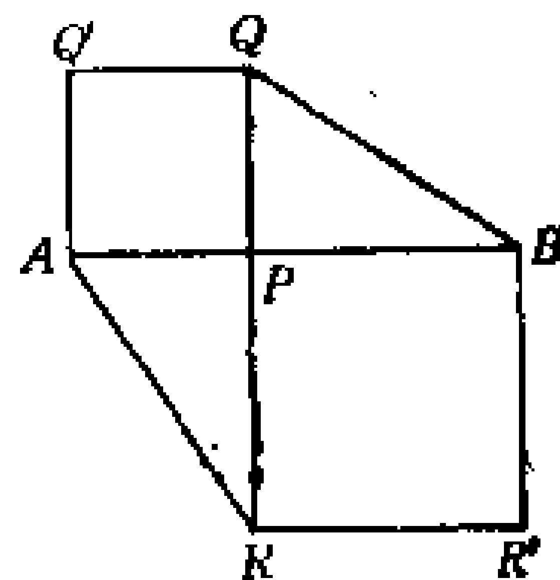


图 4-28

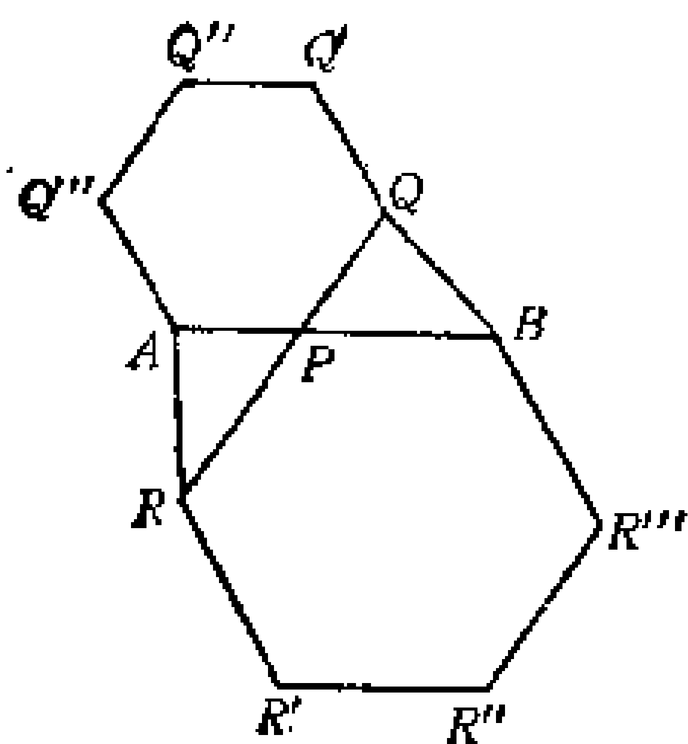


图 4-29

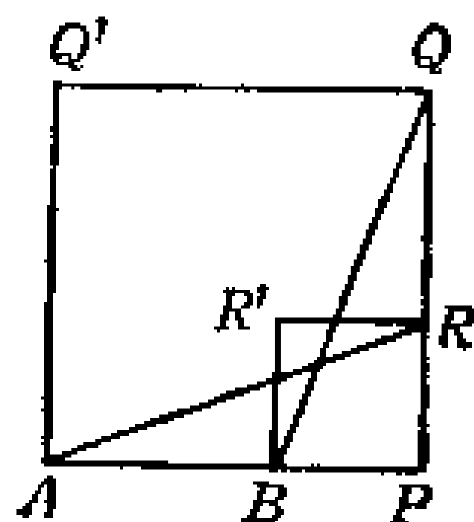


图 4-30

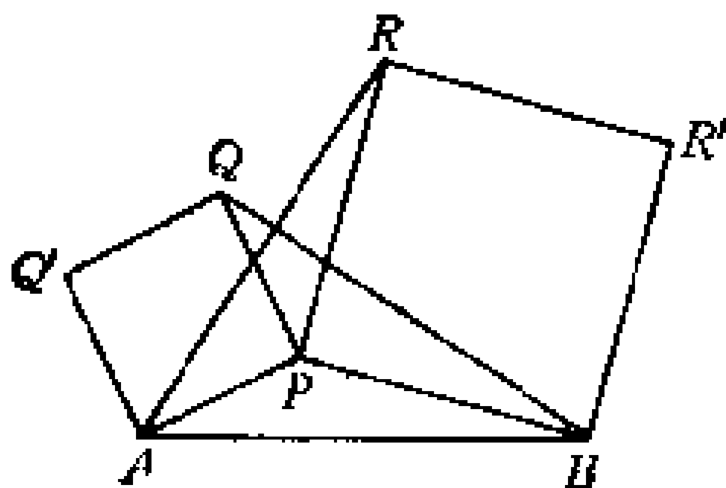


图 4-31

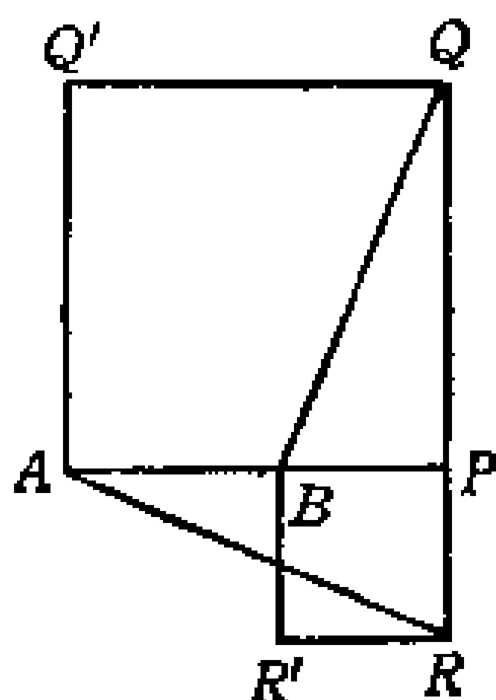


图 4-32

【例 37】 基本题：已知 P 为四边形 $ABCD$ 的外接圆 O 上任意一点，过 P 分别作 AB, CD, AC, BD（或其延长线）的垂线，它们的垂足依次为 E, F, G, H. 求证 $PE\cdot PF=PG\cdot PH$.（图 4-33）

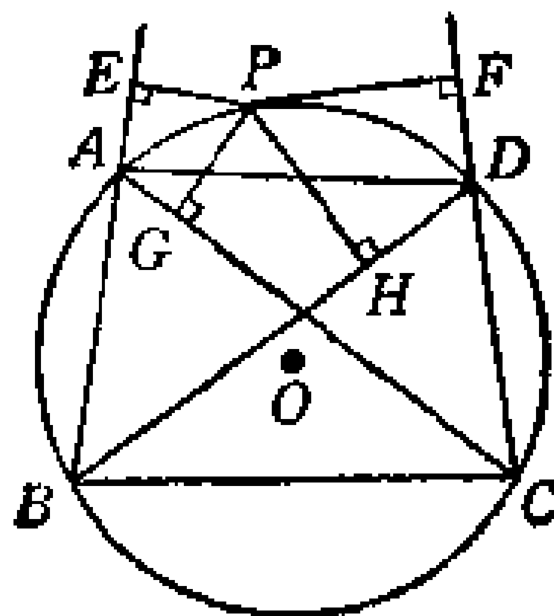


图 4-33

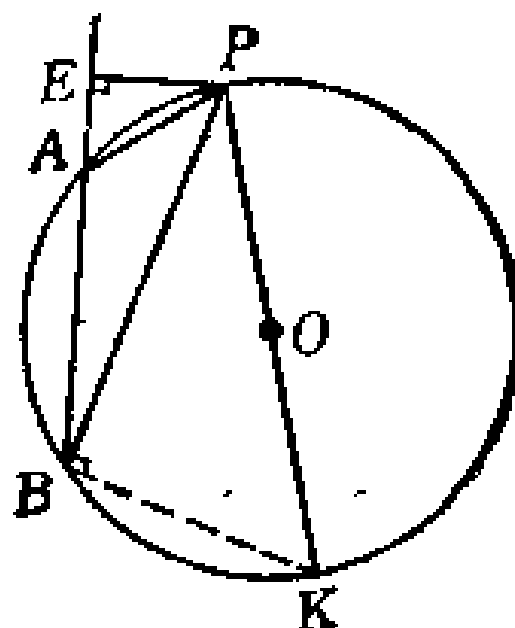


图 4-34

为了给出上述基本题的证明，可以先建立一个引理：

圆 O 的直径为 d，由圆 O 上任意一点 P 作弦 AB（或其延长线）的垂线，垂足为 E，则 $PE=\dfrac{PA\cdot PB}{d}$.

如图4-34，PK 为圆 O 的直径，连结 BK，由 $\triangle PEA\backsim\triangle PBK$，可得 $PE=\dfrac{PA\cdot PB}{d}$.

根据引理，可得 $PE\cdot PF=\dfrac{PA\cdot PB\cdot PC\cdot PD}{d^2}$；$PG\cdot PH=\dfrac{PA\cdot PB\cdot PC\cdot PD}{d^2}$. 所以 $PE\cdot PF=PG\cdot PH$.

下面就基本题进行演变：（乐嗣康，1982）

演变一 当 A 点逐渐向 B 点移动，使它无限接近直至重合，这时四边形 $ABCD$ 变成一个三角形，弦 AB 退缩成一点．对 AB 的极限位置来说，其方向上已成为过 B 点的圆 O 的切线，如图4-35．于是我们得到新题：

已知 P 为 $\triangle BCD$ 的外接圆 O 上任意一点，过 B 作圆 O 的切线 BT，过 P 分别作 BT,CD,BC,BD（或其延长线）的垂线，它们的垂足依次为 E,F,G,H．求证 $PE\cdot PF=PG\cdot PH$.

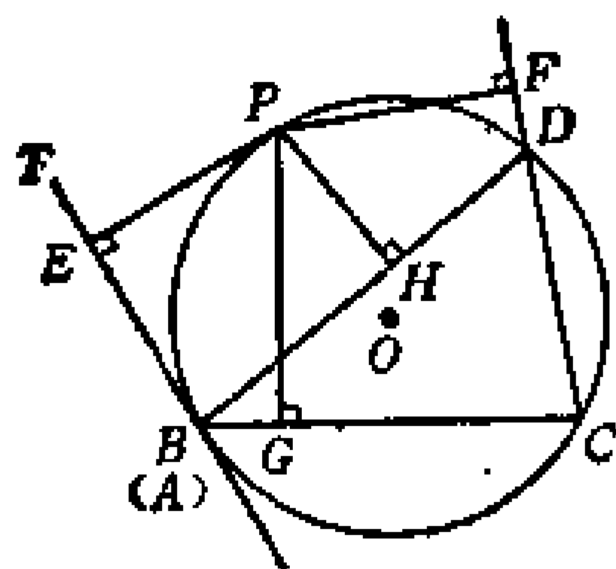


图 4-35

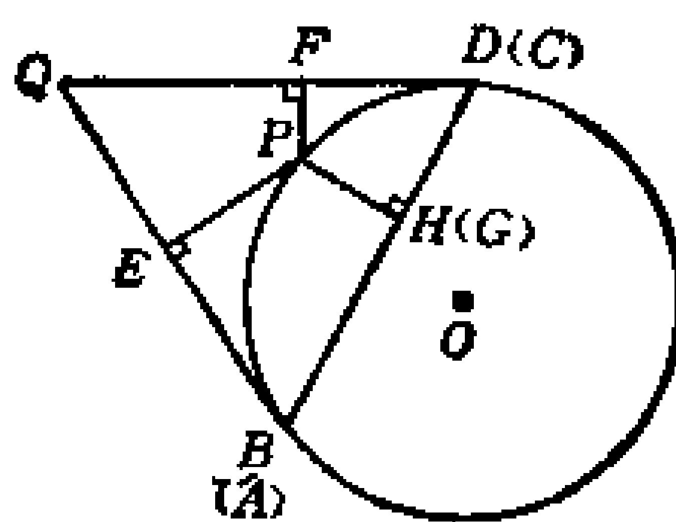


图 4-36

演变二 在演变一的基础上，再将 C 点逐渐移向 D 点，使它无限接近直至重合，这时 CD 的极限位置就是过 D 点的圆 O 的切线，于是四边形 $ABCD$ 就退缩成弦 BD，如图4-36．由于 AC 和

BD重合，所以由P点至该两线段的垂线足G，H也重合．这样又得到新题：

已知QB，QD是圆O的两条切线，B，D为切点，连结BD，P为圆O上任意一点，过P分别作QB，QD，BD（或其延长线）的垂线，它们的垂足依次为E，F，H．求证PH是PE和PF的比例中项．

【例 38】 基本题：地面上有A,B,C三点，一只青蛙位于地面上距C为0.27米的P点处，青蛙第一步从P跳到关于A的对称点P_1，第二步从P_1跳到关于B点的对称点P_2，第三步从P_2跳到关于C点的对称点P_3，第四步从P_3跳到关于A的对称点P_4，……，按这种方式一直跳下去，若青蛙在第1985步跳到了P_{1985}，问P与P_{1985}相距多少厘米？（1985年全国五四青年智力竞赛试题）

此题只要利用"中点公式"，经6次计算之后，就可发现$P_6=P$，这就是说青蛙跳过6次之后又回到了原处，所以$P,P_1,P_2,P_3,\cdots$是有周期现象的点列，$P_{1985}=P_5$，而P_5是点P关于C的对称点，因此P_{1985}到P的距离为0.27米$\times 2=54$厘米．

演变一 将三个点改为四个点，将直线跳跃改为带直角拐弯跳，这就产生了1986年全国五四青年智力竞赛试题：

在同一平面上，有点A和点P，一个人从点P开始，向点A直线前进，到达点A后，向左转$90°$，继续直线前进，走同样长的一段距离到达一点P_1．这样，我们说这个人完成了一次关于A点的"左转弯运动"．

设A，B，C，D是平面上的正方形的四个顶点、另一点P距离点D为10公里（如图4-37）．一个人从点P出发，先关于点A作一次左转弯运动，到达P_1点，接着再对B作一次左转弯运动，到达P_2点，然后关于$C,D,A,B\cdots$连续地作左转弯运动，作过11111

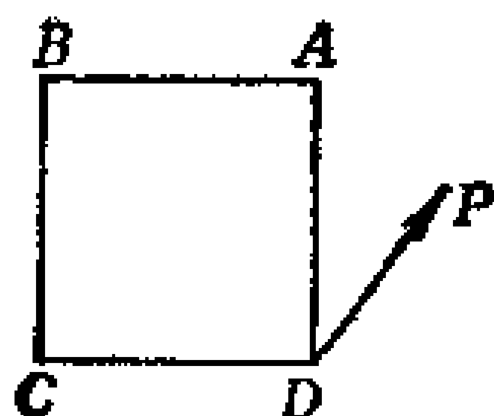


图 4-37

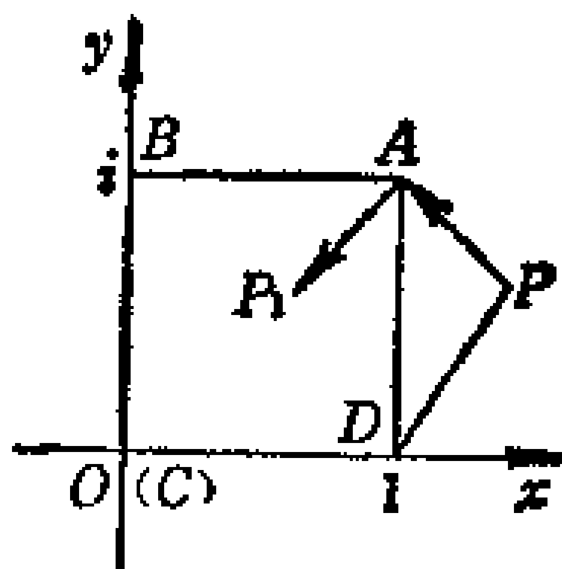


图 4 38

次左转弯运动后，到达点 Q，问 Q 距出发点多少公里？

复数解法：将正方形 $ABCD$ 置于复平面上（如图 4-38），有 $A=1+i$, $B=i$, $C=0$, $D=1$.

$\because \overrightarrow{PA}$ 左转 90° 即为 $\overrightarrow{AP_1}$,

$\therefore$ $$(A-P)i=P_1-A,$$

即 $$P_1=(1+i)A-iP.$$

于是有以下一系列等式：

$P_1=(1+i)(1+i)-iP=2i-iP$;

$P_2=(1+i)B-iP_1=(1+i)\cdot i-i(2i-iP)=1+i-P$;

$P_3=(1+i)C-iP_2=(1+i)\cdot 0-i(1+i-P)=1-i+iP$;

$P_4=(1+i)D-iP_3=(1+i)\cdot 1-i(1-i+iP)=P$.

这说明点列 $P, P_1, P_2, \cdots, P_{11111}$ 的周期是 4. 因此 $Q=P_{11111}=P_3$，从而知 $\triangle QPD$ 为一等腰直角三角形，所以

$$PQ=\sqrt{2}DP=10\sqrt{2}\text{（公里）}.$$

演变二 在上述演变的基础上，常庚哲与齐东旭又将问题引向更一般的“左转 θ 角运动”，即将向量 $\overrightarrow{PA}$ 左转 θ 角后变成向量 $\overrightarrow{AP_1}$，也就是

$$(A-P)e^{i\theta}=P_1-A$$

这里 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，并记 $e^{i\theta}=u$. 如果平面上给定的点仍然是 A, B, C 三点的话，那么有

$P_1=(1+u)A-uP$;

$P_2=(1+u)B-uP_1=(1+u)(B-uA)+u^2P$;

$P_3=(1+u)C-uP_2=(1+u)(C-uB+u^2A)-u^3P$;

$P_4=(1+u)A-uP_3=(1+u)(A-uC+u^2B-u^3A)+u^4P$;

$P_5=(1+u)B-uP_4$

$\quad=(1+u)(B-uA+u^2C-u^3B+u^4A)-u^5P$;

$P_6=(1+u)C-uP_5$

最后一式就是

$$P_6=(1+u)(C-uB+u^2A-u^3C+u^4B-u^5A)+u^6P.$$

如果上式中第一项为 0，而 $u^6=1$，那么就有 $P_6=P$，即点列 $P, P_1, P_2, \cdots, P_k$ 出现周期为 6 的周期现象．根据 $u^6=1$，考虑 $\theta=0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 各情形，发现当 $\theta=0, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}$ 时，如点列出现周期为 6 的周期现象，A, B, C 可作任意分布；当 $\theta=\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 时，如点列出现周期为 6 的周期现象，ABC 必为正三角形，但前者 $A\to B\to C\to A$ 是沿着逆时针方向行进的，后者则是沿着顺时针方向行进的．

通过上述讨论，就提出了下面这个曾被 1986 年第二十七届国际数学奥林匹克选中的题目：

在平面上给定三点 A, B, C．一个人从同一平面上的一点 P 出发，直线行进到点 A，向左转 60° 之后继续沿直线前进，走过一相同距离之后，到达一点 P_1．我们称他关于 A 点作了一次左转 60° 的运动．接着，从 P_1 出发对 B 作左转 60° 的运动到达 P_2，再从 P_2 出发对 C 作左转 60° 的运动到达 P_3，然后依次对 $A, B, C, A, B, \cdots$ 作左转 60° 的运动．经过 1986 步之后，此人发现已回到了原出发点 P．求证：ABC 必为等边三角形，而且 $A\to B\to C\to A$ 是逆时针方向绕行的．

第七节　模　型　法

数学问题的来源，一是通过人类的实践活动，从外部世界的现象提出；二是由数学本身纯粹逻辑地提出．本章前几节所介绍的编制数学习题的方法，主要是由数学自身矛盾引出的，但是数学发展史告诉我们，几何产生于测量土地，三角起源于航海和天文，概率则是从赌局的研究中萌发的，著名的七桥问题、错排(装错信封)问题、四色问题等都是数学家从实际问题中抽象出来的．所以，通过实际问题．建立数学模型来编制数学习题是教学中所不应忽视的一个重要方面．

“所谓数学模型，是指将一类事物或运动过程，用数学概念、公式以及逻辑关系从数量上加以描述，使人们能更深刻、更准确地认识其数量关系，把握其特征．”[1]质言之，数学模型就是实际问题的数学化．而模型法就是实际问题经过分析、综合、概括、抽象之后提炼出数学习题的一种编题方法．

运用模型法编制数学习题，要求编题者长于观察，善于联想，“宇宙之大、粒子之微、火箭之速、化工之巧、地球之变、生物之谜、日用之繁，无处不用数学．”(华罗庚，1959)问题是必须扬弃实际问题中质的规定性，用数学语言刻划出其中量的关系，才能按照教学目的要求编制出数学习题．常见的数学模型有

一、自然模型

意大利物理学家伽里略说过：“大自然以数学的语言讲话——这个语言的字母是：圆、三角形以及其他各种数学形体．”大自然中的许多现象和问题如测量树的高度、河的宽度，按照某种昆虫的繁

[1] 张弓《注意“数学模型”的教学——中学数学联系实际的一些看法》，《数学教学》1983年第3期．

殖速度计算增殖量，已知某种放射性物质的半衰期求一定时间内该物质的减少百分比等，都可编成数学习题．下举两例．

【例 39】 树叶的形状是相似的，于是可以从两片树叶的长度(或宽度)之比，求出它们的面积之比．得题

采得两片形状相似的树叶如图 4-39，试分别量出它们的长度，并计算出它们的面积之比．

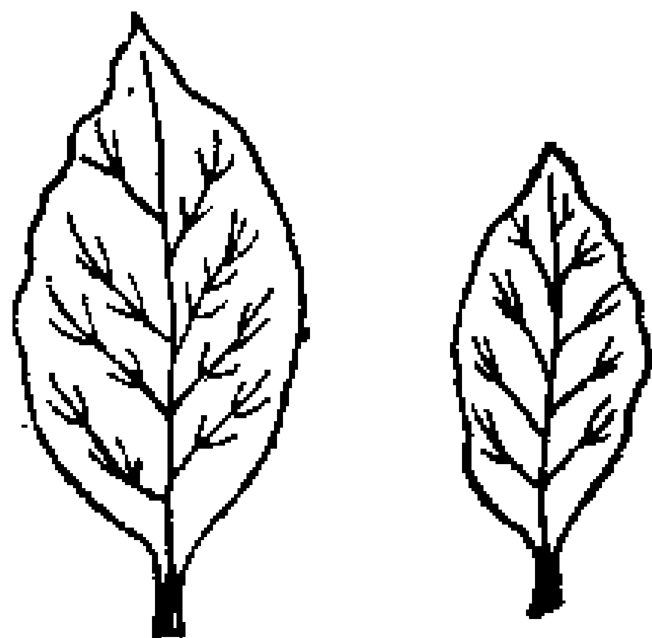


图 4-39

【例 40】 地球上经度圈的长度相等，纬度圈的长度则不等，越是靠近两极的纬度圈长度越短．为了使学生对此有更深刻的了解，可编题：

从我国的首都北京的天安门广场出发，向北走 300 公里，然后向东走 300 公里，再向南走 300 公里，再向西走 300 公里，问最后能否回到出发地点？如果不能回到的话，那么距出发地点多少公里？ （答：在出发地点以东约 13 公里处．）

二、社会模型

社会发展中有许多数学模型，如人口增长问题、战争中取胜策略、密码编制和破译问题、社会保险问题等，都涉及不少数学知识．

【例 41】 某县今年的人口总数是 65.7 万，要求在以后的第 10 年不超出 70 万，问年平均人口增长率应控制千分之几以内？

（答：6‰．）

三、经济模型

经济领域中的复利、贴现、分期付款、机器折旧、运输优化、库存设计、市场分析等问题都可结合指数函数、线性规划、优选法等数学理论，编制出适合中学程度的数学习题．

【例 42】 商店搞“购货还本”的销售方式，顾客购买某商品付

款 F 元，言明七年后由商店归还顾客原货款 F 元，若知 M 元存款的年利率为 $p\%$，则由复利公式可知，欲在 t 年后获得本利和 F 元，其关系是 $$F=M\cdot(1+p\%)^{t}.$$
所以这笔交易中，顾客相当于用 $[F-F\cdot(1+p\%)^{t}]$ 元钱购买某商品。给出具体数值后得题：

某家具商店实行“购货还本”的销售方式，顾客买一套家具付款 2000 元，16 年后商店将货款如数归还顾客，现知存款的年利率为 10%，问在这笔交易中该顾客相当于用多少钱买这套家具？

（答：1565元。）

【例 43】 库存设计有这样问题：某商店全年销售量为 D，该商品的年储存费用为每件 I 元，购货员每次订购商品的数量是相等的，订购一次所需费为 S 元，若每次进货量为 Q，则该商品所需的经营总费用 $$F=\frac{D}{Q}\cdot S+\frac{Q}{2}\cdot I.$$
这里的 $\frac{D}{Q}$ 是进货次数，$\frac{D}{Q}\cdot S$ 是进货费用，$\frac{Q}{2}$ 是库存平均量，$\frac{Q}{2}\cdot I$ 是库存费用。现知 D, I, S 都是定值，则 $F=f(Q)$，为使 F 最少，有一个最佳订货批量问题。实际上

$$\begin{aligned}F&=\frac{I}{2}\left(Q+\frac{2DS}{IQ}\right)\\&=\frac{I}{2}\left(\sqrt{Q}-\sqrt{\frac{2DS}{I}}\cdot\frac{1}{\sqrt{Q}}\right)^2+\sqrt{2IDS}.\end{aligned}$$

当 $Q=\sqrt{\frac{2DS}{I}}$ 时 F 取最小值 $\sqrt{2IDS}$。给出具体数值后得题：

某种型号的电视机全年销售量为 5000 台，这种电视机的年库存费用为 5 元，购货员每次订购的电视机数量相等，订购一次需费用 20 元。问每次应订购多少台电视机，才能使所耗费用为最少？

（答：200台。）

四、物理模型

社会生产、科学技术以及自然科学基本理论中都有许多问题，

向我们提供有关对数、方程、二次函数、周期函数、圆锥曲线等数学知识的物理模型.

【例41】 水库排放的水流从溢流坝下泄，一般用挑流的方法来消除水流的部分动能，以保护水库的坝基及下游堤坝的安全，水流挑离坝基愈远，对安全愈有利. 现根据黑龙江省桦南县向阳山水库的实际资料，编制出下题：

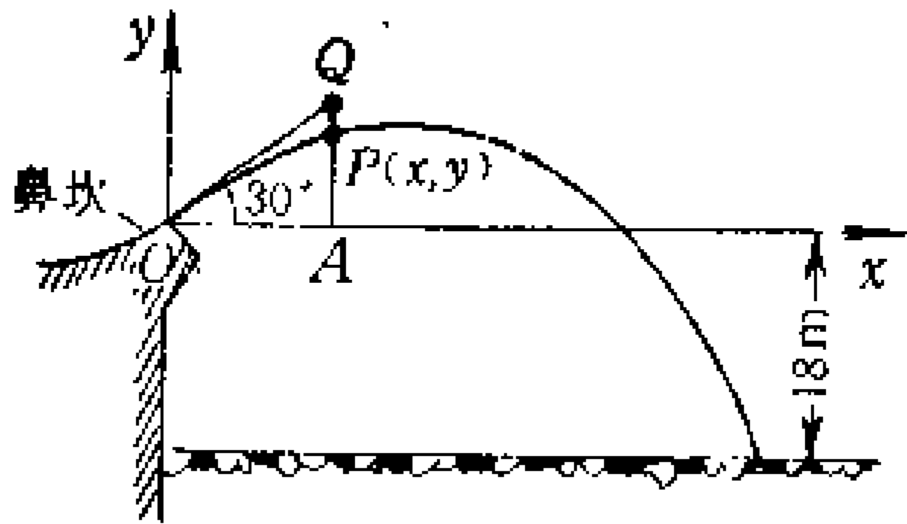


图 4-40

某水库放水时用鼻坎挑流的方法来消除水的部分动能，如图4-40，已知鼻坎的挑角为30°，高程为162m. 水库的水位高程为171m，鼻坎下游基底较鼻坎低18m. 试导出水流曲线的方程，并计算挑出水流的水平射程.

以鼻坎的出口处为坐标原点，水平方向为 x 轴，建立直角坐标系 xOy. 设鼻坎出口处水流质点的速度为 v，落差为 s，由

$$s=\frac{1}{2}gt^2=\frac{(gt)^2}{2g}=\frac{v^2}{2g},$$

得

$$v=\sqrt{2sg}=\sqrt{2\times 9g}=\sqrt{18g}.$$

在忽略空气阻力的条件下，如果不计重力，那么经过 t 秒后水流质点应到达 Q 点，有 $OQ=\sqrt{18g}\,t$. 但由于重力的影响，水流质点的实际位置在 P 点，$QP=\frac{1}{2}gt^2$，所以水流质点的垂直位移是

$$\begin{aligned}y&=PA=QA-QP=OQ\sin 30^\circ-QP\\&=\sqrt{18g}\,t\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}gt^2=\frac{3\sqrt{2g}}{2}t-\frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

同时经 t 秒后，水流质点的水平位移是

$$x=OA=OQ\cos 30^\circ=\sqrt{18g}\,t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{6g}}{2}t.$$

于是可得水流曲线的参数方程.

$$\begin{cases} x=\dfrac{3\sqrt{6g}}{2}t; \\ y=\dfrac{3\sqrt{2g}}{2}t-\dfrac{1}{2}gt^2. \end{cases}$$

在这里,重力加速度 g 是常量,时间 t 是参变量. 如果消去 t,可得 $y=-\dfrac{1}{27}x^2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$. 这是一个抛物线方程,当 $y=-18$ 时,可求得排出水流的水平射程 $x\approx 31.2$(m).

五、生活游戏模型

在我们每天进行的日常性事务和业余活动中, 都要用到一些数学知识, 如购物、摄影、下棋、运动、参观、游戏等, 其中都有某些数学问题. 1981 年全国数学联赛中有一道题目:

一张台球桌形状是正六边形 $ABCDEF$. 一个球从 AB 的中点 P 击出,击中 BC 边上的某点Q,并且依次碰击 CD, DE, EF, FA 各边, 最后击中 AB 边上某一点. 设 $\angle BPQ=\theta$,求 θ 的取值范围.

据此题作者王观杰回忆, 他是从电视里看到打台球节目, 台球经过球桌边缘的几次反射后击中预定目标的现象而得到灵感, 然后把长方形的台球桌改为正六边形, 于是就构造出上面这道题目来.

苏联著名科普作家别莱利曼(Я. И. Перельман), 搜集了日常生活中 116 个数学问题, 写成一本名为《活用的数学》的书(中译: 1953 年中华书局出版); 波兰著名数学家史坦因豪斯 (H. Steinhaus),收集了 120 个有关数学的图画、游戏和问题,写成一本名著《数学万花镜》(中译: 1981年上海教育出版社出版), 这些生活游戏模型的数学题集都被译成多种文字在各国出版.

第五章　数学习题的解题策略

策略，按字面上的意思是"计谋"，英文中 strategy 一词，可释为策略，也可释为战略，是指一种总体的行动方针，而非具体方法(战术). 自心理学对简单的信息加工过程，如感觉、注意、记忆等的研究，演进到对复杂行为的研究，策略这个词便频繁地出现在心理学著作中. 心理学家们认为，在解决问题的过程中，如果主体所接触到的不是标准的模式化了的问题，那么就需要进行创造性的思维，需要有一种解题"策略"，所以策略的产生及其正确性被证实的过程，常常被视为创造的过程或解决问题的过程. 对于创造过程或解决问题过程，心理学家曾经提出一些模式，如杜威的"五步模式"、沃勒斯的"四阶段模式"和邓克尔的"范围渐趋缩小的汇总的模式"等. 但是，即使在当代心理学的主流——现代认知心理学之中，对于策略的研究也往往通过"河内塔问题"①这类极其简单而典型的问题，而尚未进入到解决复杂问题的思维过程的透析，对此西蒙就说过："研究下围棋、解决河内塔问题到底有什么意义？可以肯定，这类问题本身并没有多大重要性. 但是，我们可以通过这方面的研究积累知识，去解决更重要的实际问题. 如教学生学会解决数学问题."[1] 可见，对数学习题的解题策略的研究还是一项新的极其困难的任务.

① 河内塔问题是印度的一个古老的传说. 开天辟地的神勃拉玛在一个庙宇里留下了三根金刚石的棒，第一根上面套着 64 个圆的金片，最大的一个在底下，其余一个比一个小，依次叠上去，庙里的众僧不倦地把它们一个个地从这根棒搬到另一根棒上，规定可利用中间的一根棒作为帮助，但每次只能搬一个，而且大的不能放在小的上面. 心理学家把问题中的金片的数目减少到 5 个，以研究解决问题的不同策略.

[1] 西蒙《人类的认知》第 62 页，科学出版社 1986 年 11 月第 1 版.

第一节　解题策略的概念和发现过程

根据著名的波利亚"怎样解题"表[1]的提法，数学习题的解题过程可分解为四步：(1)弄清问题；(2)拟定计划；(3)实现计划；(4)回顾．这里的弄清问题就是正确地、全面地理解原始问题的含义，分清问题中的"已知"与"所求"，领悟问题的条件所提供的信息，并将这些信息进行分解与编码．审题是解题的首要步骤，也是解题的基础．经过审题之后，如果主体发现题目具有现成的解题模式，就可以直接进行解答．如果题目(主要是探索性题和问题性题)没有现成的解题模式可循，就需要探求解题策略．

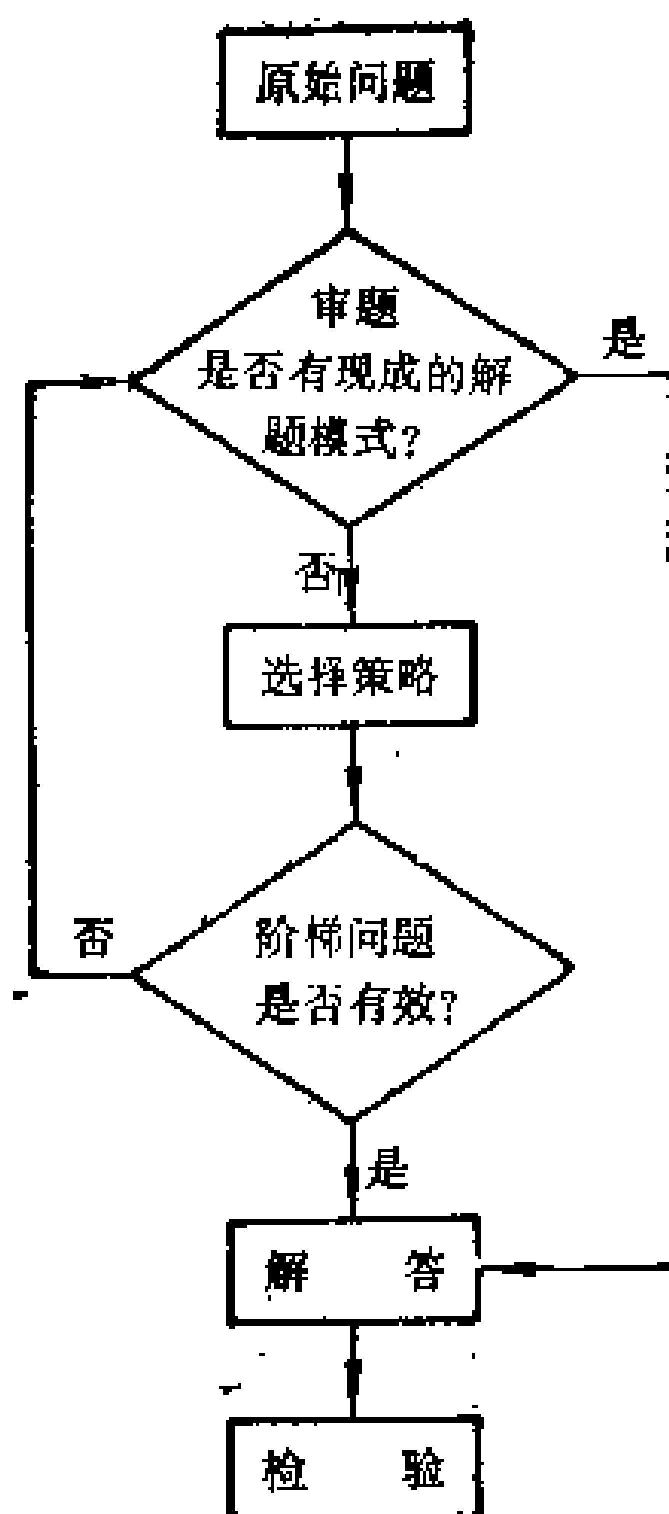
数学习题的解题策略是指探求数学习题的答案时所采取的途径和方法．其方法是有层次性的，解题策略是最高层次的解题方法，是对解题途径的概括性的认识．

解题策略选定后，就需要执行，一般是通过化归或提出辅助问题的方法，构造出阶梯问题，如果阶梯问题有效，就可将原题转化为熟悉问题，从而得到题目所要求的结果；如果在执行的过程中发现阶梯问题无效，说明策略失败，就需要进一步分析题目的条件所提供的信息，广泛地联想与题目信息有关的解题方法，探求新的解题策略．上述过程用框图表示如下(见下页)．

策略的选择过程，就是主体通过审题将原始问题中的信息，吸收并同化到主体原有的认知结构中，在追求问题的解答这种内驱力的推动和调节下，使原有的认知结构发生改组和重建，并提出阶梯问题，以便借助这些阶梯问题解决原始问题的过程．具体地来说，可分为三个阶段：

1．酝酿．即指向阶段．主体在弄清问题的基础上，初步辨认

[1]　G．波利亚：《怎样解题》，科学出版社 1982 年 1 月第 1 版。



问题的症结所在，通过广泛的联想、迅速的局部推理和活跃的直觉，逐渐形成一种产生解题策略的心向，其指向原则是：

(1) 目的性．解题策略的产生虽然有赖于直觉，看起来颇为神秘，但是离不开有目的的思维活动，“如何实现题目的要求？”这是探求解题策略时须臾不可离开的指向。“由因导果”、“执果溯因”、“盯住目标”、“抓牢关键”都是目的性原则的体现．

(2) 相似性．在总体上或局部地找到与熟悉问题的相似之处，利用熟悉问题的解题思路来发现新问题的解题策略．

(3) 和谐性．题目的已知条件通过主体的知识结构的中介，架起通向题目的结论和要求的桥梁．化繁为简，变异为同，由远及近，转暗为明，使得已知条件、原有经验及题目结论这三者之间在审美意识的作用下形成一个和谐的统一体．

(4) 开放性. 尽可能地从问题中获取信息，包括通过隐含条件所得到的信息，多角度地考虑问题，灵活地转化问题. 信息经加工、编码之后，不但作常规的线性的输出，而且有意作非常规的非线性的输出，然后择其善者而从之.

(5) 批判性. 及时地进行自我反馈，检验对题意理解的正确性及解题思路的可行性，克服思维定势引起惰性、呆板性和盲目性，防止由于局部的满足感而产生的对隐含条件的忽视.

2. 明朗. 即形成阶段. 主体在各指向原则的综合指导下，经过多方的选择，运用推理和想象，在新问题同化于主体原有的认知结构的基础上，在总体上对解题方法产生一种本质的、似真的领悟.

由酝酿阶段到解题策略的形成，往往是跳跃性的，没有明显的完整的推理过程，主体不能明确地意识到它的行程. 如H. 德尔金在其有关实验中就观察到，解决问题过程中，思维有一种跃向结论的倾向，对问题即告解决很为确信，即使主体当时并未确知底细.

3. 验证. 即执行阶段. 根据所选择的解题策略，一面探索，一面前进，或将原来问题化归为新的问题，或者提出辅助性问题，用逻辑的方法验证策略的可行性. 在这一阶段，要求主体的思维具有明晰性和严密性，在运算过程中要求合理性和完整性. 如果验证的结果表明所选择的策略是不可行的，则应检查是否在运算过程中发生了错误，或是未能充分利用已知条件，如果有补救的办法不妨试之，否则就应重新根据指向原则另选策略.

通过上面对数学习题解题策略选择过程的分析，我们看到，策略的产生虽有分析思维的参加，但本质上是直觉的，所以策略的产生过程具有以下特点：(1)非逻辑性. 主体根据问题情景，不自觉地检索出某些经验，并不按照明确的逻辑规则，作出策略判断，这种判断带有一定程度的猜测性和预见性；(2) 快速性. 对于一个问

题情境，主体一般只进行局部的短暂的思考，就自动地、迅速地作出策略判断，只有当主体多次运用不同策略都未得到成功时，才需要作长期的定向思考，通过灵感的突发而产生新的策略；(3)个体性．由主体的经验不同，加工信息的方式各异，因此同一个数学习题对不同的人来说，就可能采取不同的解题策略，又由于策略产生过程的自动化和快速性，所以主体往往说不清思维的行程和形成策略判断的原因，带有极大的个体性，所谓"仁者见仁，智者见智"；(4)或然性．主体作出策略判断时，一般说理智清楚，意识明确，具有一种坚信感，但是由于策略产生过程中的非逻辑性，所以得到的策略在客观上可能正确，也可能不正确，具有或然性，需要在执行过程中通过逻辑加以检验．

下面以托勒密(Ptolemy)定理的证明为例说明解题策略的产生过程．

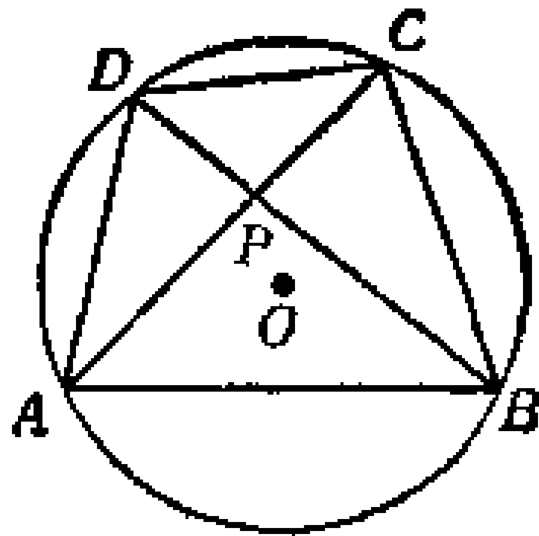


图 5-1

【例 1】 已知四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，求证 $AC\cdot BD=AB\cdot CD+AD\cdot BC$．(图5-1)

酝酿：

由已知条件可得出什么？

$ABCD$ 是圆内接四边形；

$\angle DAB$ 与 $\angle BCD$ 互补；

有好几对相等的角，如 $\angle CAB=\angle CDB$，$\angle CPB=\angle APD$，等等；

有一些三角形相似，如 $\triangle APD\backsim\triangle BPC$ 等；

……………………

通过这些能找到导向结论的方法吗？

很困难！

再从要证明的结论来看，有些什么特点？

左边是两个线段的乘积；

右边是两项的和，每一项都是两个线段的乘积；

左边涉及的线段是四边形的两条对角线，右边涉及的线段是四边形的四条边；

……………………

通过这些能进一步考虑用什么方法可导向结论？

变形：将左边拆成两项； ①

变形：移项得 $AC\cdot BD-AB\cdot CD=AD\cdot BC$，能够将左边化简，从而导向右边吗？ ②

化异为同：AC，BD 可以用四边形的边来表示吗？ ③

利用中介化异为同：AC，BD，AB，BC，CD，DA 可以用什么共同的中介量来表示呢？ ④

联想：设 $\angle APB=\alpha$，则 $AC\cdot BD$ 再乘以 $\frac{1}{2}\sin\alpha$ 就等于四边形 $ABCD$ 的面积，那么右边乘以 $\frac{1}{2}\sin\alpha$ 能否得到四边形 $ABCD$ 的面积呢？ ⑤

……………………

由念头①，进一步设 $BD=x+y$，我们需要证明 $AC(x+y)=AB\cdot CD+AD\cdot BC$。不妨先满足 $AC\cdot x=AB\cdot CD$，如图 5-2，只需有$\triangle ACD\backsim\triangle ABE$。已经有 $\angle ACD=\angle ABD$，还需有$\angle DAC=\angle EAB$，于是可以确定 E 点的位置。从而得

策略一：将左边拆成两项。

执行：过 A 引 AE 交 BD 于 E，使 $\angle BAE=\angle CAD$，由于$\triangle ACD\backsim\triangle ABE$，又可证明$\triangle ABC\backsim\triangle AED$，于是有 $AC\cdot BE=AB\cdot CD$ 及 $AC\cdot ED=AD\cdot BC$。所以策略一可行；

由念头②，进一步想，欲将左边化简，应导使两项具有公共的

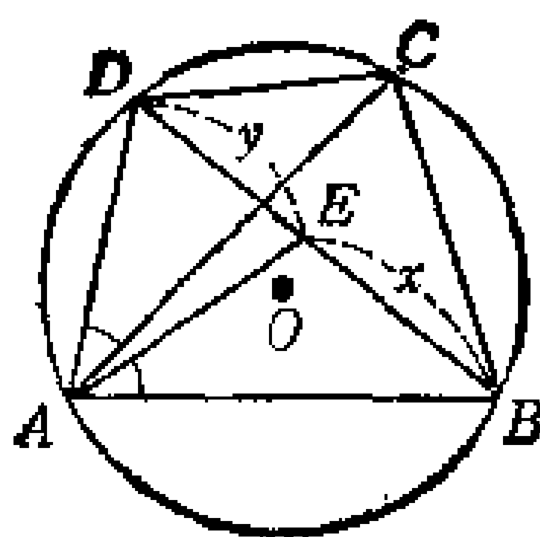


图 5-2

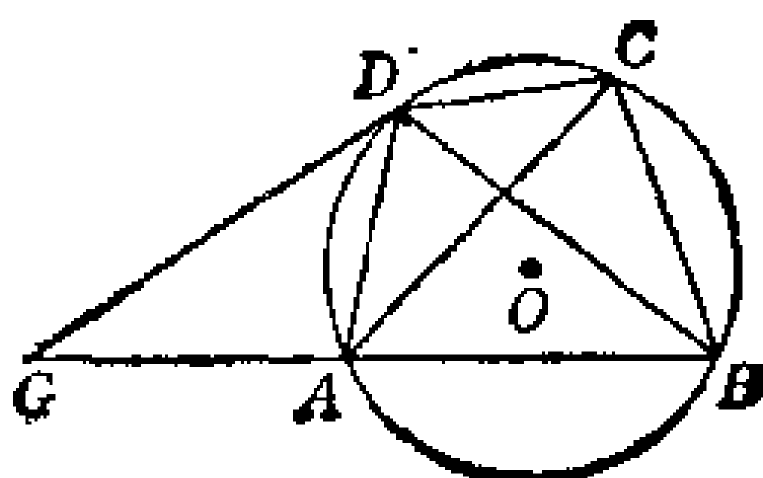


图 5-3

因子，如 $AC\cdot BD=CD\cdot x$，因为 AC 和 CD 是 $\triangle ACD$ 的两边，若将此式变形为 $AC:CD=x:BD$，则 x 应该是"以 BD 为一边且与 $\triangle ACD$ 相似的三角形的一边(AC 的对应边)"。从而考虑过 D 点作直线 DG 交 BA 的延长线于 G(图 5-3)，使 $\angle BDG=\angle ADC$。因为 $\angle ACD=\angle ABD$，所以 $\triangle ACD\backsim\triangle GBD$，从而得

策略二：左边合并化简。

执行：过 D 作直线 DG 交 BA 的延长线于 G，使 $\angle BDG=\angle ADC$，由于 $\triangle ACD\backsim\triangle GBD$，所以 $AC:CD=GB:BD$，即 $AC\cdot BD=GB\cdot CD$。从而有

$$AC\cdot BD-AB\cdot CD=GB\cdot CD-AB\cdot CD$$
$$=(GB-AB)\cdot CD=GA\cdot CD,$$

这样，只要证明 $GA\cdot CD=AD\cdot BC$。考虑到 $\triangle GAD\backsim\triangle BCD$，这是可以实现的。所以策略二可行。

由念头③，联想到圆内接四边形的基本量个数是 4，因此用四边形的四条边表示对角线是完全可能的，这增强了我们的坚信感。得

策略三：分别用四边形的四条边表示对角线 AC 及 BD，然后证明所要的结论。

执行：注意到圆内接四边形的内对角互补，因此利用余弦定理

可以做到这一点. 为方便起见, 设 $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AC=m$, $BD=n$, $\angle ABC=\theta$, (图 5-4) 则 $\angle ADC=180^\circ-\theta$. 在 $\triangle ABC$ 中有

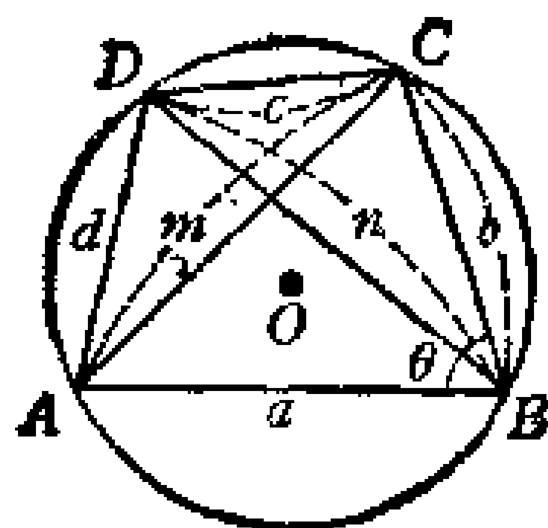


图 5-4

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-m^2}{2ab};$$

在 $\triangle ACD$ 中有

$$\cos(180^\circ-\theta)=\frac{c^2+d^2-m^2}{2cd}.$$

上面两式相加, 得

$$\frac{a^2+b^2-m^2}{2ab}+\frac{c^2+d^2-m^2}{2cd}=0,$$

$$\therefore\quad m^2=\frac{(a^2+b^2)cd+(c^2+d^2)ab}{ab+cd}=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}.$$

类似地有

$$n^2=\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}.$$

于是得 $m^2n^2=(ac+bd)^2$, 即 $mn=ac+bd$, 这就是我们所要证明的结论, 所以策略三也可行.

由念头④, AC, BD, AB, BC, CD, DA 分别是圆内接四边形的对角线和边, 或者都可看成是圆内接三角形的边, 这些三角形的边, 通过正弦定理, 是易于用外接圆的直径和它们的对角来表示的, 从而得

策略四: 用圆的直径及圆内接四边形的边与对角线所构成的角之中的三个, 来表示四边形的各边与对角线, 然后证明所要的结论. (注意: 由于圆内接四边形的基本量的个数是 4, 所以除了圆的直径之外, 这样的角只能选取三个作为基本量.)

执行: 如图 5-5, 设 $\angle DAC=\alpha$, $\angle BAC=\beta$, $\angle ABC=\theta$, 又圆的半径为 R. 则

$AC=2R\sin\theta$;

$BD=2R\sin(\alpha+\beta)$;

$AB=2R\sin(180°-\beta-\theta)$

$\quad=2R\sin(\beta+\theta)$;

$BC=2R\sin\beta$;

$CD=2R\sin\alpha$;

$AD=2R\sin DCA=2R\sin DBA=2R\sin(\theta-\alpha)$.

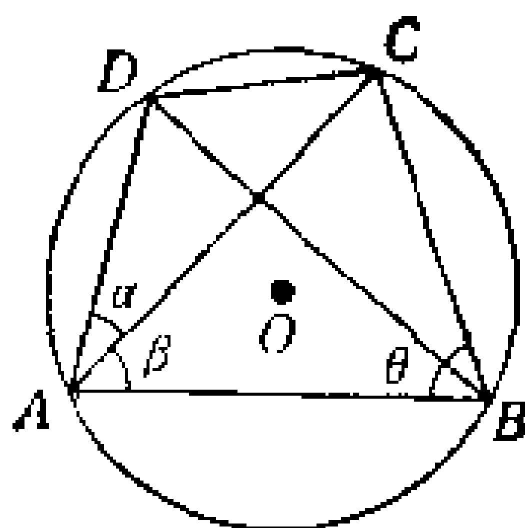


图 5-5

于是 $\quad AC\cdot BD=4R^2\sin\theta\sin(\alpha+\beta)$;

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=4R^2\sin(\beta+\theta)\sin\alpha+4R^2\sin\beta\sin(\theta-\alpha)$$
$$=4R^2[(\sin\beta\cos\theta+\cos\beta\sin\theta)\sin\alpha+\sin\beta(\sin\theta\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha)]$$
$$=4R^2\sin\theta[\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha]$$
$$=4R^2\sin\theta\sin(\alpha+\beta).$$

上述结果表明猜想完全正确，所以策略四可行.

由念头⑤，将原题的结论等价地转化为 $\frac{1}{2}(AB\cdot CD+AD\cdot BC)\sin\alpha=$四边形 $ABCD$ 的面积，从面得

策略五：证明 $\frac{1}{2}AB\cdot CD\sin\alpha+\frac{1}{2}AD\cdot BC\sin\alpha$ 等于四边形 $ABCD$ 的面积.

执行：想象 $\frac{1}{2}AB\cdot CD\sin\alpha$ 与 $\frac{1}{2}AD\cdot BC\sin\alpha$ 分别表示三角形的面积. 不妨先考虑 $\frac{1}{2}AD\cdot BC\sin\alpha$，有必要移动 AD 的位置，使它与 BC 成为同一三角形的两边，并且它们的夹角为 α，为此，过 A 作 $AK\parallel BD$ 且交圆 O 于 K，连 BK，则 $BK=AD$（图 5-6），又连 CK，DK，则

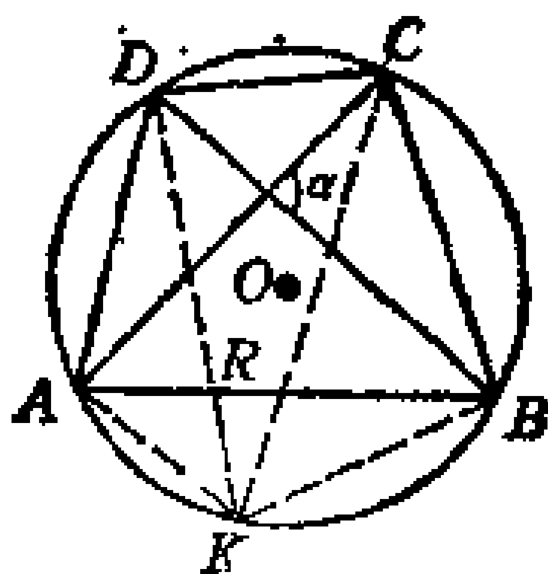


图 5-6

$$\angle CBK = 180° - \angle CAK = 180° - \alpha,$$

所以$\triangle CBK$ 的面积$=\frac{1}{2}BK \cdot BC \sin CBK = \frac{1}{2}AD \cdot BC \sin\alpha$.

又因 $AK \parallel BD$, 故 $DK = AB$, $\angle CDK = \angle CAK = \alpha$, 也可以得到

$$\triangle CDK \text{ 的面积} = \frac{1}{2}AB \cdot CD\sin\alpha.$$

剩下的问题只要证明：$\triangle CBK$ 的面积与$\triangle CDK$ 的面积之和，即四边形 $KBCD$ 的面积=四边形 $ABCD$ 的面积，对这一点，通过$\triangle KBR$ 的面积$=\triangle ADR$ 的面积就可实现. 故策略五可行.

以下第二节至第九节，我们将讨论常用的解题策略.

第二节 枚 举 法

当主体接触的问题存在着大量的可能的答案(或中间过程)，而暂时又无法用逻辑方法排除这些可能的答案中的大部分时，就不得不采用逐一检验这些答案的策略，也就是用枚举法来解题. 采用枚举法时，重要的是应做到既不疏漏又不重复.

枚举法这种解题策略，起源于原始的计做方法，即数数. 这种解题策略看起来虽然显得"笨拙"，但确实是一种基本的解题策略，大多数数学习题虽然从整体上未必是采用枚举法，但是在局部的过程中离不了它. 完全归纳法、分域讨论法等都是这种策略思想的体现. 如果枚举的过程是分阶段的，常常利用树图.

【例 2】 译解下列算式，其中不同的字母代表不同的数字.

$$\begin{array}{r} A\,H\,A\,H\,A \\ +\quad T\,E\,H\,E \\ \hline T\,E\,H\,A\,W \end{array}$$

在这个问题中，共有五个不同字母，每个字母可以取 0, 1, 2,

3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这十个数字，从算式中各数之间关系，我们只能得到：

$T=A+1\geqslant 2,$ ①

$H+T\geqslant 9,$ ②

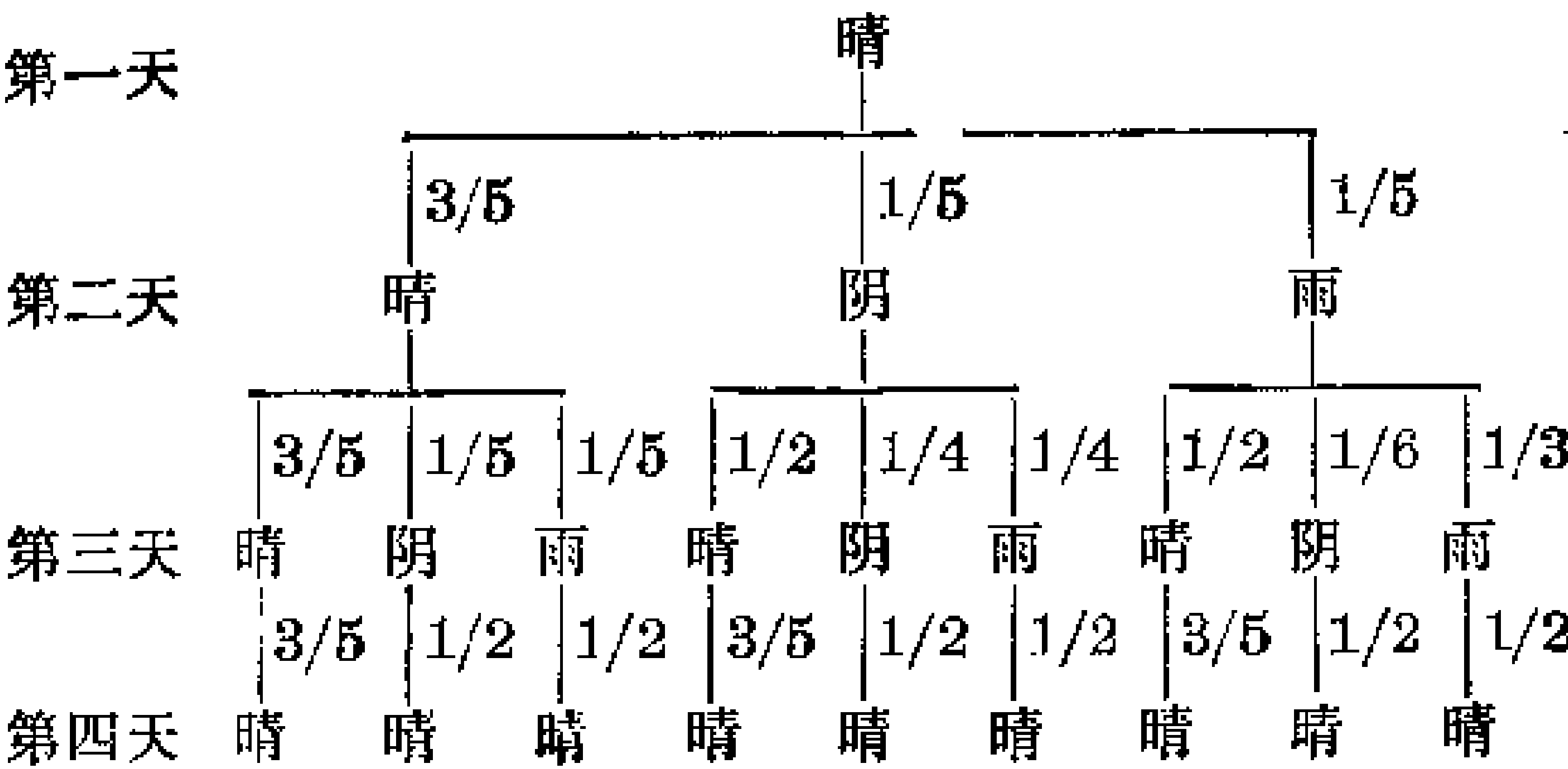
$2H$ 的个位数字为 A 或$(A-1)$， ③

从以上信息不足以确定有关的五个字母所代表的数，因此采用枚举法.如首先考虑 A 的一切可能取的值:1, 2, 3, …, 8, 对于 A 的每一个值，再依次考虑 T, H, …等字母的一切可能取的值，等等．得到的答案是唯一的，即 47474+5272=52746.

【例 3】 根据某地的气象历史资料分析，若某日是晴天，则次日是晴、阴、雨的概率分是 $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{5}$; 若某日是阴天，则次日是晴、阴、雨的概率分别是 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$; 若某日是雨天，则次日是晴、阴、雨的概率分别是 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$. 现知某日是晴天，问第四天仍是晴天的概率是多少？

采用枚举法，画出树图.

解：



所求概率为

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}$$
$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\frac{27}{125}+\frac{3}{50}+\frac{3}{50}+\frac{3}{50}+\frac{1}{40}+\frac{1}{40}+\frac{3}{50}+\frac{1}{60}+\frac{1}{30}$$
$$=\frac{139}{250}.$$

【例 4】 已知无理数$\frac{\pi}{4}$，试找出两个有理数a，b，使得$a<\frac{\pi}{4}<b$，且对(a, b)中的任意有理数c，当c写成最简分数时它的分母不小于 10．

本题的题意可以转译成：在$\frac{\pi}{4}$的近旁两个有理数a，b，满足$a<\frac{\pi}{4}<b$，且在(a, b)中没有分母小于 10 的最简分数，由于在一定范围内这种分数的个数是有限的，因此可以列出某一区间（包含$\frac{\pi}{4}$）内所有分母小于 10 的最简分数，采取枚举法的策略，以确定其中何者最靠近$\frac{\pi}{4}$，从而找到所需要的有理数a，b．

解：因为$\frac{\pi}{4}=0.7853\cdots$，所以$\frac{\pi}{4}\in(0, 1)$．在区间$(0, 1)$内，所有分母小于 10 的最简分数是

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},$$
$$\frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ \frac{1}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{7},\ \frac{5}{7},\ \frac{6}{7},\ \frac{1}{8},$$
$$\frac{3}{8},\ \frac{5}{8},\ \frac{7}{8},\ \frac{1}{9},\ \frac{2}{9},\ \frac{4}{9},\ \frac{5}{9},\ \frac{7}{9},\ \frac{8}{9}.$$

逐个与$\frac{\pi}{4}$比较，确定与$\frac{\pi}{4}$最靠近的是

$$\frac{7}{9}=0.7777\cdots \quad 与\ \frac{4}{5}=0.8.$$

在区间$\left(\frac{7}{9}, \frac{\pi}{4}\right)$内任取一有理数，如0.78，记为$a$；在区间$\left(\frac{\pi}{4}, \frac{4}{5}\right)$内任取一有理数，如0.79，记为$b$，则$a$，$b$即为所求.

从上面几个例子，我们看到，枚举法就是首先找出感兴趣的集合，然后把集合里的元素逐个检验．当集合里的元素过多，而检验时又无规律可循，就应考虑采取其他解题策略.

第三节　模式识别

现代认知心理学的研究成果已经清楚地表明，某个专家他能很快地通过直觉找出在某一情景下解决问题的策略，是因为他具备迅速地把记忆中原有的知识、经验检索出来的能力，西蒙认为，这种情形"就好像在百科全书中，如果我们把索引找对的话，我们就能从索引找对那个内容．因此专家把这一类的知识都存贮在百科全书中，即长时记忆中．如果他很快认出来这个问题是属于哪一类的，那么他很快地就得出答案了．"[1] 拉金(J. Larkin)等人也认为专家解决问题是要依靠丰富的知识，但这些知识必须有大量的模式作为索引.

主体接触到数学习题之后，首先辨别题目的类型，以便与已有经验知识发生联系，这种解题策略便是模式识别．这里我们所说的模式，不是指一种完全固定化了的程序，而是泛指某种类型，某种知识范围．主体能够正确识别模式，就可很快地缩小搜索的范围，向作出解答迈出了决定性的一步.

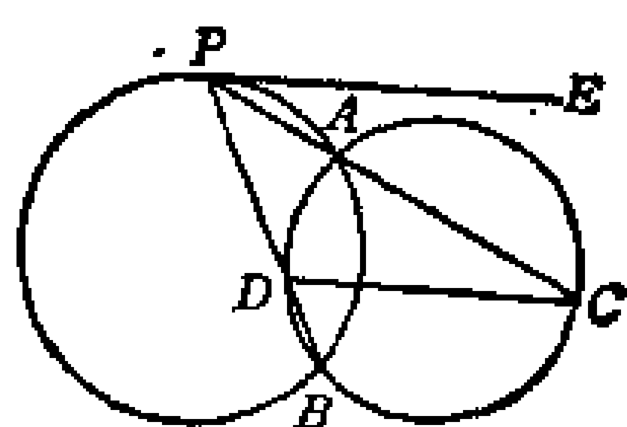


图 5-1

模式识别在学生解答数学习题时是怎样表现的？朱新明曾经以若干平面几何习题为例进行研究

[1] H. A. 西蒙《信息的存贮系统—记忆》，《心理科学通讯》1981年第3期.

(1982)，其中的一个题目是

【例 5】 两圆相交于 A 和 B，从一个圆上任意一点 P，作直线 PA 和 PB 交另一圆于 C 和 D(图 5-7)．求证 CD 平行于过 P 点的切线 PE.

下面是被试学生 M 和 B 解题时的口语记录.

M 的口语记录

时间	内容	注
0～13″	(审题)	一开始就认出了弦切角和同弧上的一对圆周角．在 13 秒钟后就径直解决问题.
13″	弦切 $\angle EPC$ 等于 $\angle PBA$.	
31″	又因为 $\angle ACD$ 和 $\angle DBA$ 对的是等弧，所以这两个角相等.	
48″	所以 $\angle EPC$ 等于 $\angle PCD$.	
53″	所以 CD 平行 PE.	

B 的口语记录

时间	内容	注
0～18″	(审题)	
18″	AB 对圆周角，取得两个三角形.	
49″	三角形 PBA 和三角形 PDC，证这个三角形可以通过什么？…这角…这角…①	① 不能从问题情境中认出同弧上的圆周角，却企图找条件来证明两个三角形全等.
1′11″	AB 是这两个圆的同弦.	
1′29″	AB 对的圆周角 BPA…	
4′12″	(在想，不出声)	
4′21″	主要是角 CPE 要和角 C 相等.	
4′25″	证不出来.	
	……	
4′29″	连结 EC，证三角形和它相等，…②	② 没有从问题情境中认出弦切角，因此再次作无效尝试.
	不对！	
	……	

上述被试 M 在证完题目后，曾经说："要证 CD 平行 PE，就

要证角 EPC 等于角 POD，这两个角，我当时估计不会直接相等……”．这里 M 提到的“估计”，正是一种直觉，这种直觉使 M 意识到这两个角“不会直接相等”，因此需要进行模式识别．这个例子说明了“每当被试从问题的情境中认出某种熟悉的而又符合解题目标的东西，就唤起了与问题有关的知识，也就是说，被试事先从问题情境中认出某种熟悉的东西，才唤起与解题有关的知识．”“这样看来，所谓‘熟悉的东西’就是一些几何图形模式，而所唤起的知识就是表达几何图形性质的几何定理、几何公理等．解几何题就得由认出某种几何图形模式，唤起相应的几何定理、公理等知识．”[1]

在解代数方程应用题中，模式识别又是怎样的呢？1984 年施铁如在实验中提出了下面问题．

【例 6】 甲、乙两人织毛线，甲 5 小时织的数量与乙 8 小时织的数量相等，现乙织了 2 小时后甲才开始织，问再过几小时甲与乙织的数量相等？

他发现较弱的学生对于这一问题的类型判断，往往在“追及问题”和“工程问题”之间犹豫不决，而强手则在念过题目之后马上就说这是“追及问题”，很快正确地列出方程，他的解题过程多半只是模式识别和解题策略的执行，搜寻活动很少．因而认为“在解代数方程应用题中，模式辨认主要表现为识别应用题的类型．被试者能否识别类型在很大程度上决定着他能否迅速、准确地解答课题．”[2]

模式识别是解数学习题时广泛采用的策略，不同的数学习题与不同的模式相联系，同一个数学习题也可能与不同的模式相联系，模式可以理解为知识结构，是内化到头脑中的符号(表象、语言等)形式，也就是皮亚杰所说的狭义的认识图式(scheme)．“题

---

[1] 朱新明《解决几何问题的思维过程》，《心理学报》1983 年第 1 期．

[2] 施铁如《解代数应用题的认知模式》，《心理学报》1985 年第 3 期．

组归类”、“突出基本图形”都是教学中强化模式识别策略训练的做法.

第四节 问题转化

解答数学习题，作为创造性的思维活动过程，其重要的特点是思维的变通性和流畅性，当主体接触的问题难以入手，那么思维不应停留在原问题上，而应将原问题转化成为另一个比较熟悉、比较容易解决的问题，通过对新问题的解决，达到解决原问题的目的．苏联数学家雅诺夫斯卡娅(С. А. Яновская)在回答“解题意味着什么?”时说:“解题——就是意味着把所要解的问题转化为已经解过的问题．”这一回答应该说是十分简练和正确的．

问题转化也叫做化归，化归是数学家特别善于使用的解题策略，是数学教学中必须予以关注的．作为解答数学习题的策略，应用化归的必要条件是：和原问题相比，化归后所得的新问题必须是较为简单的，或者是已经解决了的，否则，化归就失去了意义．笛卡儿说过：“我所解决的每一个问题都将成为一个范例，以用于解其他问题．”一个正确的化归策略的产生，往往要经过多次的试验和失败，也就是在尝试错误中进行学习，但是现代认知心理学家倾向于认为仅仅在尝试错误中学习是不够的，正确解题策略的产生还需要靠顿悟．一个著名的例子是“缺角棋盘的覆盖问题”：

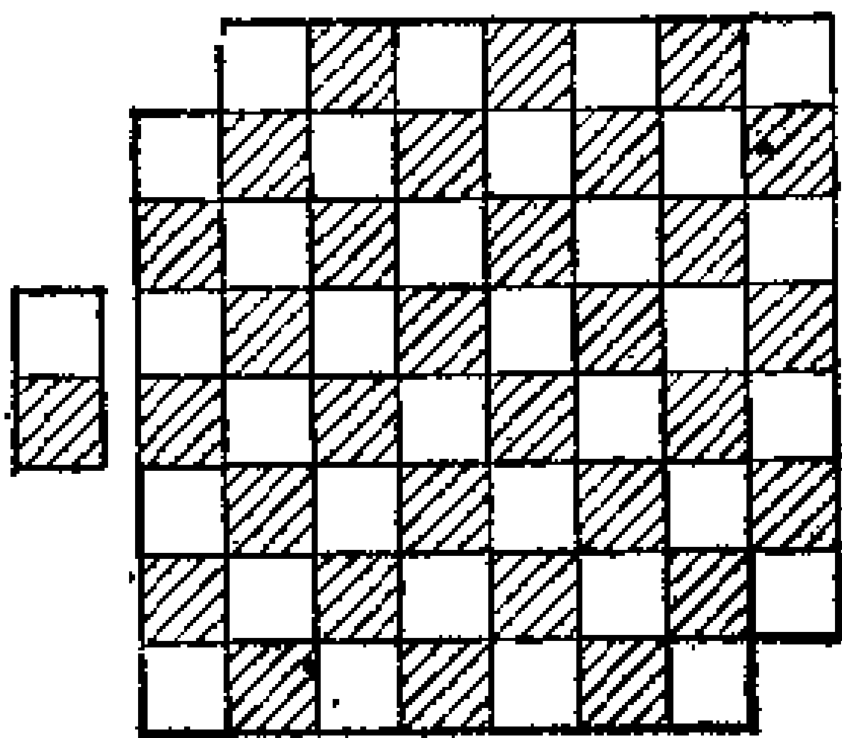


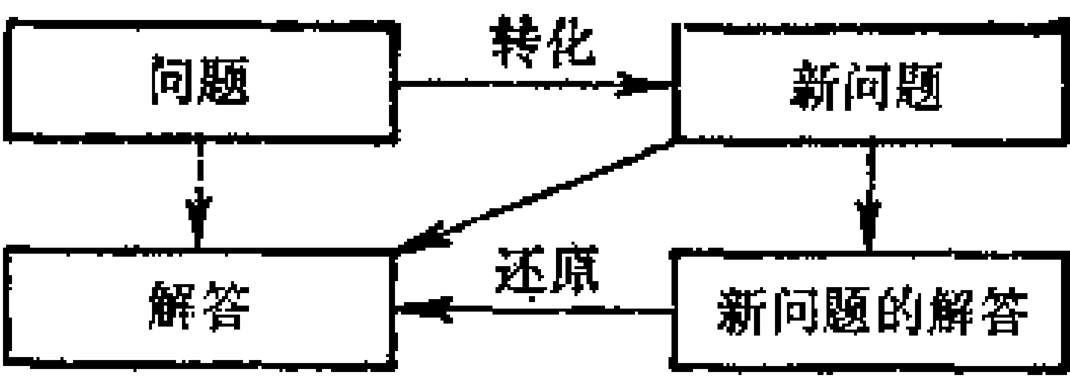
图 5-8

棋盘有 $8\times8=64$ 个格，假定有 32 个长方形棋子，每个棋子

的大小相当于两个格的面积，显然，32 个棋子可以盖满 64 个格，若砍去对角上的两个黑格(图 5-8)，试问能否用 31 个长方形棋子把所有剩下的 62 个格盖满？

解决这个问题的策略，似乎只要用枚举法，考虑到一切可能的情形，反复尝试，总可以得到答案。但实际上这几乎是不可能的，需要靠顿悟，改变解题策略，把问题转化一下，考虑到每个长方形棋子只能盖住一黑一白两个方格，在这个缺角棋盘中究竟有几个黑格，几个白格，因此原问题可化归为缺角棋盘中的黑格的个数与白格的个数是否相等的问题，这样很快就找到解答，即原题的答案是否定的.

用问题转化策略解数学习题的过程如下：



下面通过例子说明在不同的问题情境中问题转化策略的运用.

【例 7】 已知三个平面两两相交，求证它们或相交于一点或通过一直线.

此题如将结论转化改述为："若它们不相交于一点则通过一直线"；或者改述为："若它们不通过一直线则相交于一点"的思路就清晰了.

【例 8】 当 a 为什么值时，由不等式 $1<x\leqslant 2$ 可以得到 $x^2-2ax+a<0$？

此题应转化问题的表述. 由已知条件知二次三项式 $f(x)=x^2-2ax+a$ 在区间 $(1, 2]$ 上是负的，而这又等价于区间 $(1, 2]$ 位

于 $f(x)$ 的两根之间(因为二次项的系数为正). 这个条件又等价于区间的两个端点位于二次三项式两根之间. 最后这个条件又等价于 $f(1)\leqslant 0$ 且 $f(2)<0$, 即

$$\begin{cases}1-a\leqslant 0;\\4-3a<0,\end{cases}$$

由此得到 $a>\frac{4}{3}$.

上述两例中原题的表述都有曲折难懂之感, 因此采取转化问题的表述的策略, 将问题作等价形式的改述, 而使解题思路明朗化.

【例 9】 解方程

$$(2x^2-x-6)^4+(2x^2-x-8)^4=16.$$

此题应考虑 $(2x^2-x-6)$ 与 $(2x^2-x-8)$ 的平均值 $(2x^2-x-7)$, 并令其等于 t, 可得新方程 $(t+1)^4+(t-1)^4=16$. 整理之, 为一关于 t 的准二次方程, 可以解出, 易得原方程之根.

【例 10】 已知 $p^2+q^2=r^2$, p, q, r 均为正数. 求证: $1<\frac{p}{r}+\frac{q}{r}\leqslant\sqrt{2}$.

由已知条件可得 $\left(\frac{p}{r}\right)^2+\left(\frac{q}{r}\right)^2=1$, 联想到 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, 作代换: $\frac{p}{r}=\sin\alpha$, $\frac{q}{r}=\cos\alpha$, 于是所要证明的结论便转化为: $1<\sin\alpha+\cos\alpha\leqslant\sqrt{2}$. 引入辅助角, 再转化为证明: $\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$, 便一目了然.

以上两例是通过变量的替换以使问题转化, 产生化繁为简、转暗为明的效果.

【例 11】 已知 $a+b=2$, a, b 均为正数, 求 $\mu=\sqrt{a^2+4}+\sqrt{b^2+1}$ 的最小值.

此题应作数形转化, 通过几何图形来表示原题中的数量关系,

使代数问题转化为几何问题．如图5-9，M 为线段 AB 上一动点，$AM=a$，$MB=b$，$AB=2$，又 $CA\perp AB$，$DB\perp AB$，$CA=2$，$DB=1$．则 $\mu=CM+MD$，显见其最小值为 $CD=\sqrt{13}$．

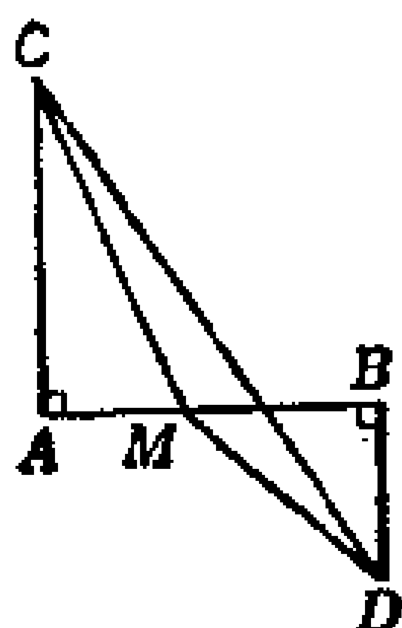


图 5-9

【例 12】 已知

$$\operatorname{tg}(\beta-\alpha)=\frac{1-k}{1+k}\operatorname{tg}\alpha,$$

求证： $\sin(2\alpha-\beta)=k\sin\beta$.

此题条件和结论中都涉及三个参量 α，β，k，由于已知条件容易变形为 $k=f(\alpha,\beta)$；要证明的结论也可变形为 $k=g(\alpha,\beta)$，于是原题就转化为证明 $f(\alpha,\beta)=g(\alpha,\beta)$．事实上，由已知得

$$k=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}(\beta-\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\beta-\alpha)},$$

分子、分母分别和差化积，并加整理，得

$$k=\frac{\sin(2\alpha-\beta)}{\sin\beta}.$$

由此便得结论．

【例 13】 已知 $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1$，求证：$\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{tg}\gamma$，$\operatorname{tg}\beta$ 成等比数列．

此题从结论来看，要证明的关系是 $\operatorname{tg}^2\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$．这里 $\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{tg}\gamma$，$\operatorname{tg}\beta$ 三者之中任何一个都易于表示为其他两个的显式；但从条件来看，只有将 $\sin^2\gamma$ 表示为关于 $\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{tg}\beta$ 的显式是方便的，于是有

$$\sin^2\gamma=\sin^2\alpha\left[1-\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}\right]=\sin^2\alpha\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

考虑到 $\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{\sin^2\gamma}{1-\sin^2\gamma}$，将上面的结果代入此式即得 $\operatorname{tg}^2\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$.

以上两例都属于三角条件等式的证明，其特点是所要证明的等式是已知条件的转化，我们所采取的解题策略是抓住主参数转化问题，也就是将这个参数(或其三角函数)表示为关于其他参数的显式，从而建立条件和结论之间的关系.

问题转化策略在数学习题解法中有着广泛的应用，其表现形式是多种多样的，例如降次法、消元法、证明不等式中的比较法、将立体几何问题平面化、*RMI*(关系、映射、反消)原则等都是问题转化策略的具体运用.

第五节 中途点法

一个数学习题，如果从已知条件出发，难以直接得出结论，可

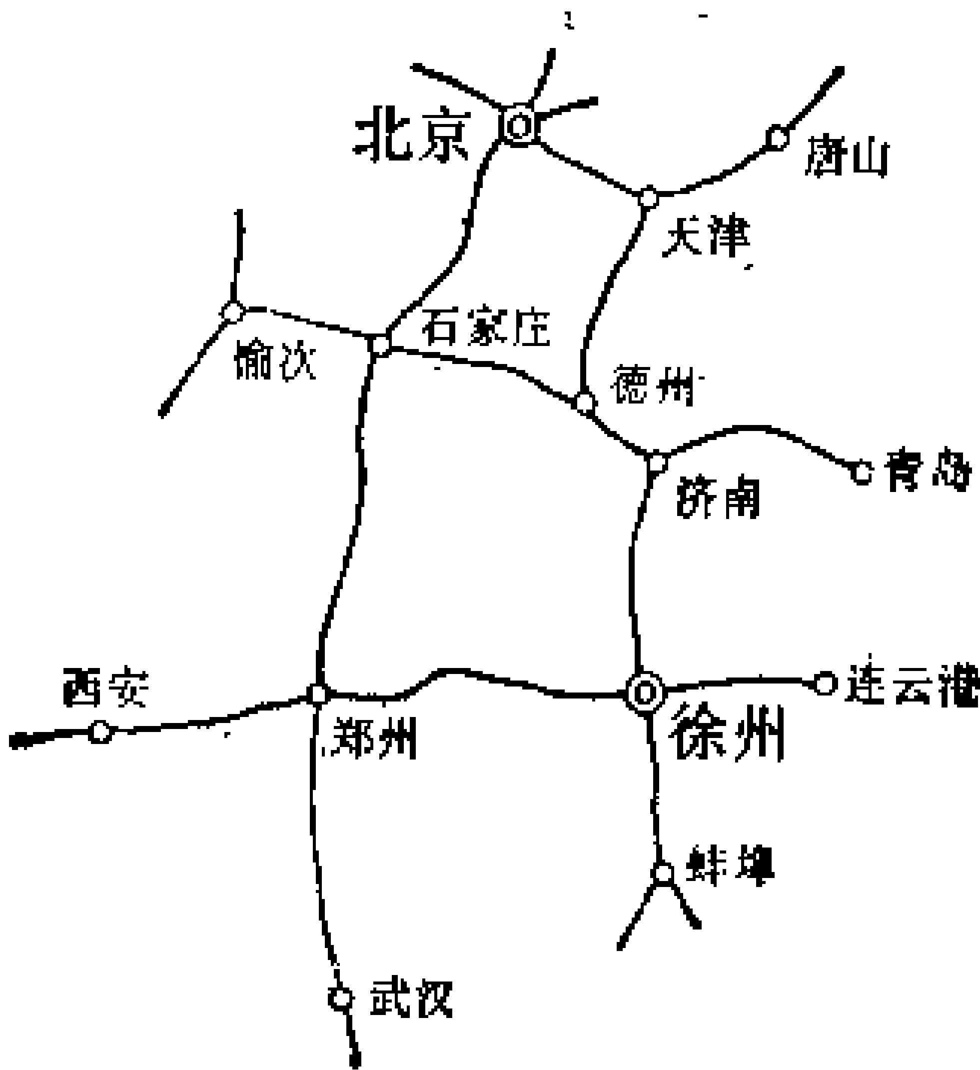


图 5-10

在已知条件和结论之间设立几个中途点，把原问题分解为若干个小问题，通过这些小问题的解决，使原问题得到解决．笛卡儿曾经说过，他决心遵守的思维规则之一是"把我所考察的每一个难题，都尽可能地分成细小的部分，直到可以而且适于加以圆满解决的程度为止"．这种分而治之的解题策略叫做中途点法．

以旅行问题为例，某人要从徐州乘火车去北京，他在地图上看了路线(图 5-10)，选择济南、德州和天津作为中途点．为什么一下子他就选出合理的中途点呢？因为通过地图他直觉地判断这是一条最短的路线．当然也可以选择济南、德州和石家庄为中途点，不过这样其路程要长些．当然还有一些路程将是更长的路线．至于选郑州、西安为中途点，则是错误的选法了．我们把从徐州出发的一切可能情形都考虑到，可绘出行动树图(图 5-11)：

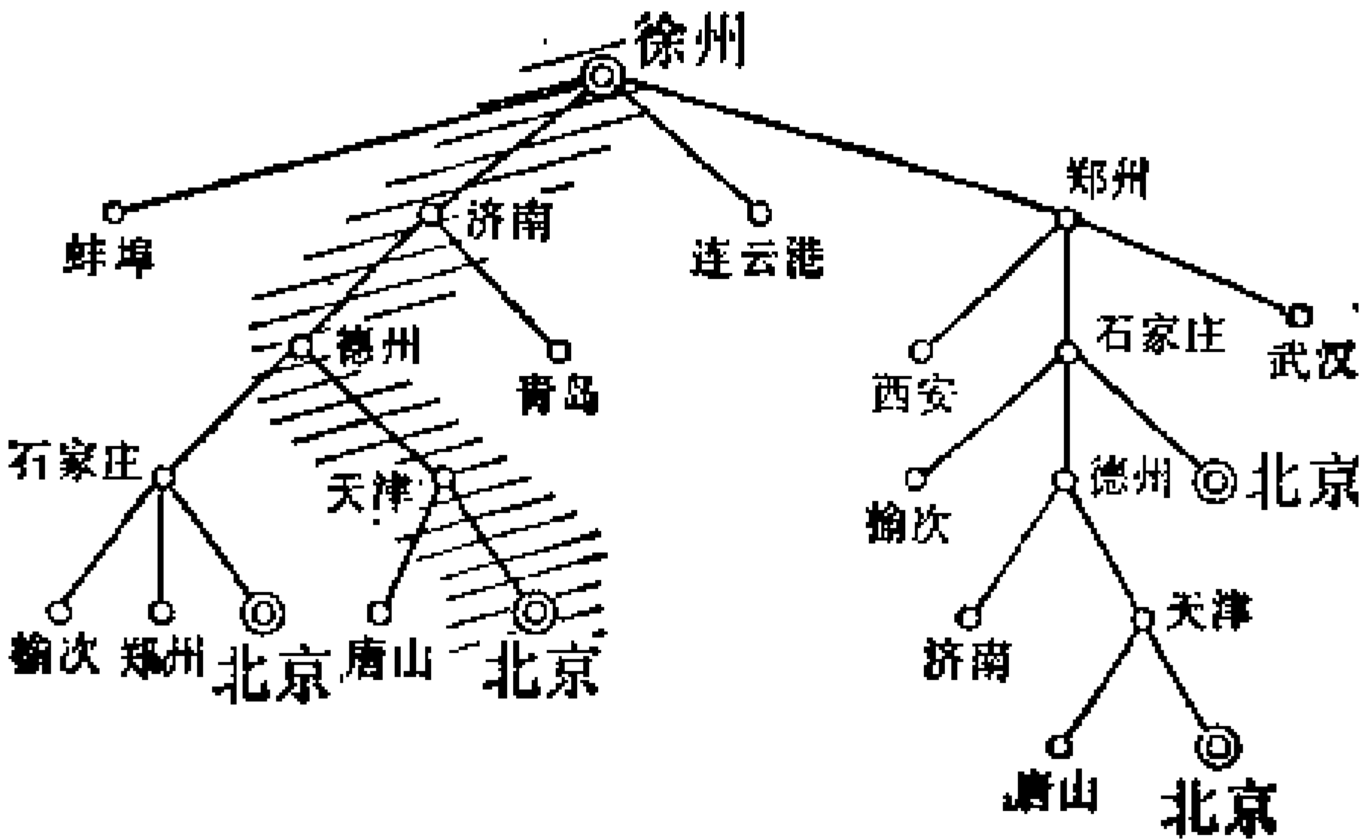


图 5-11

在这个行动树图中，可看到一共有 15 条路线，其中 4 条路线可到达北京，其余 11 条路线或者是不能到达，或者是产生明显的迂回．这里我们可看到正确地选择中途点的意义，即可以减少解题的尝试范围，缩小搜索空间．当然在不少数学习题中，中途点的正确选定也要经过一定的探索过程，尽管这样，中途点法作为一种

解题策略，它的意义仍然是巨大的.

【例 14】 如图 5-12 PA 是圆 O 的切线，A 为切点，过 PA 的中点 M 引圆 O 的割线交圆于 B, C. PB, PC 分别交圆于 D, E. 求证：$DE \parallel PA$.

这是一道比较复杂的题目，由起点（已知条件）不能直接到达终点（求证结论），要选择中途点. 选择的方法，一是从起点开始往下推，一是从终点开始往上找，即所谓综合-分析法. 综合的好处是每一步都在作正确的推理，所以能扩大对问题的了解，即使所得的中途点并不正确，也会得到一些信息（失败的经验）可以用于解题；分析的好处是目的明确，容易把握住解题的理路.

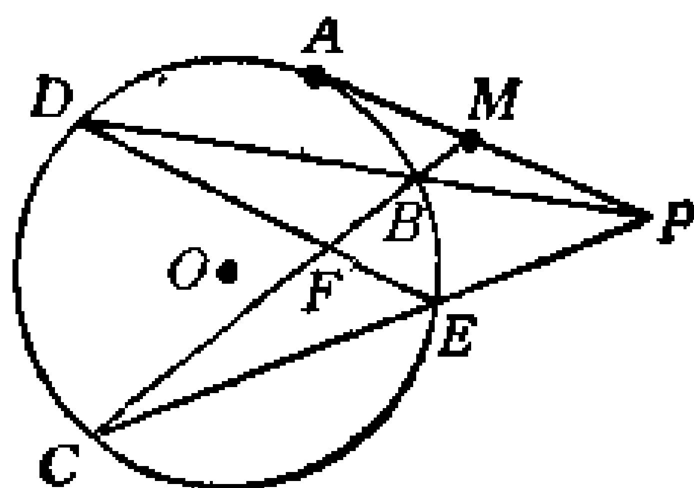
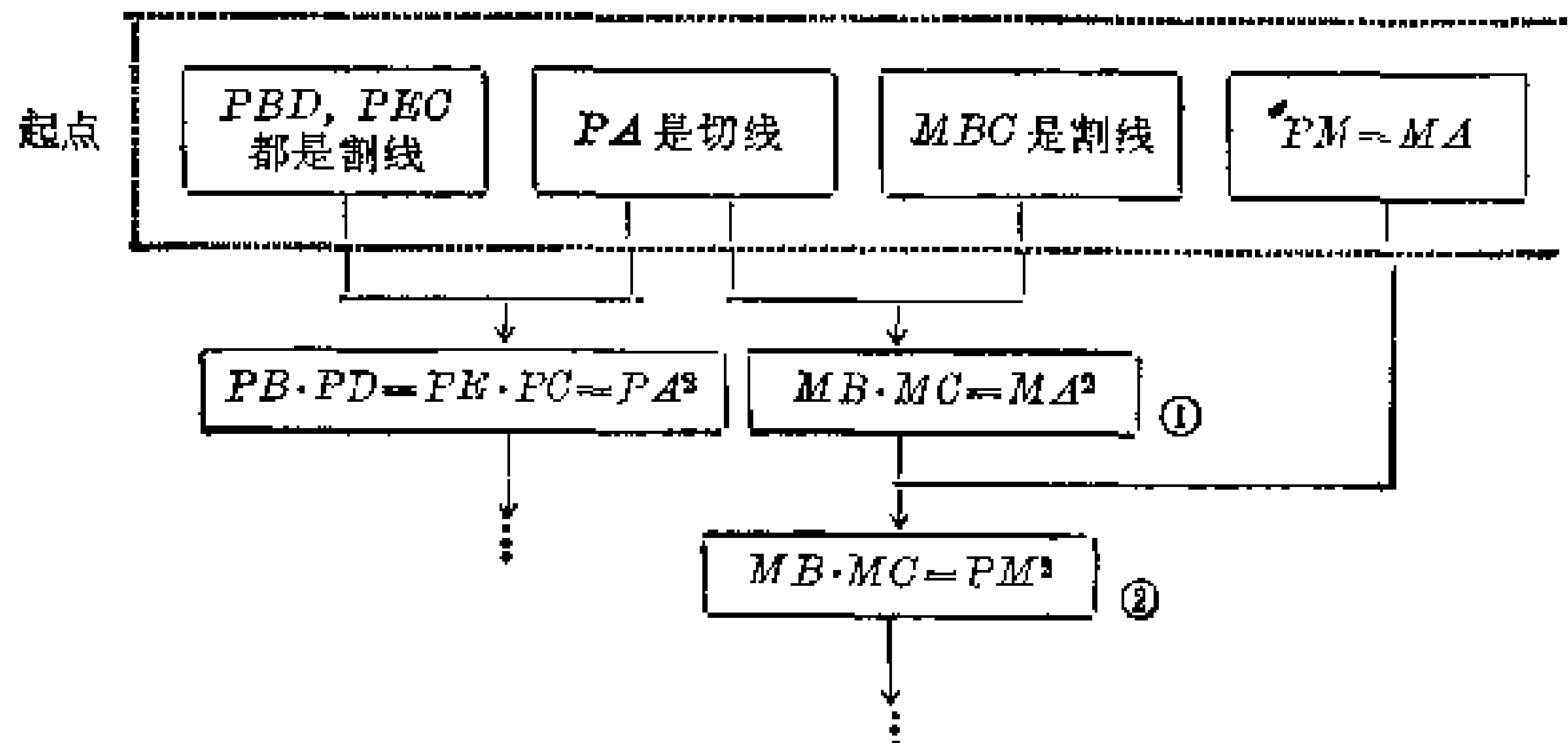
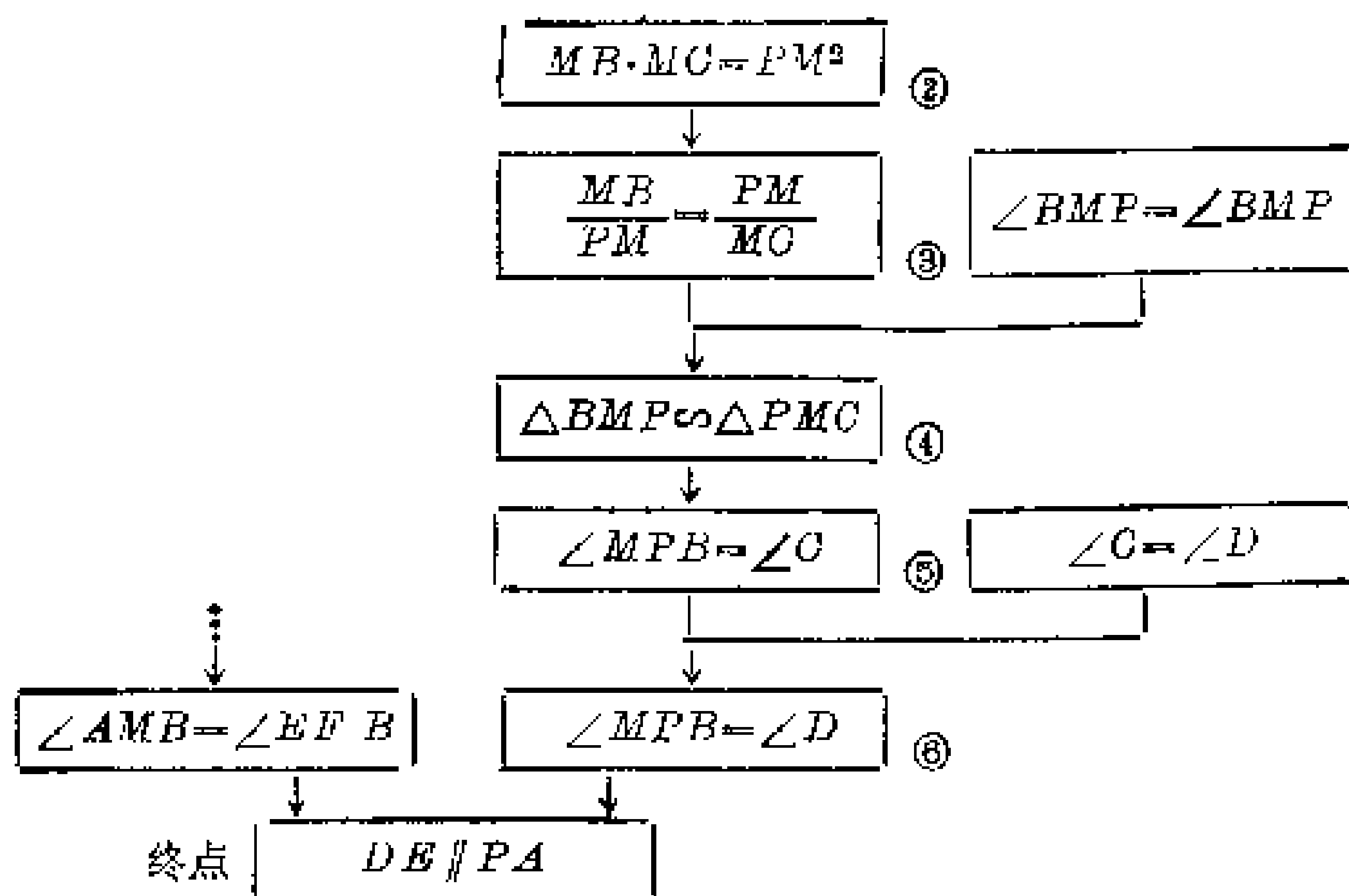


图 5-12

由起点往下推，其过程示意如下（由上往下看）：



由终点往上找，其过程示意如下（由下往上看）：



从以上"下推上找"的过程中，至少应形成一条连结起点和终点的通路．实际上这条通路就是

起点→①→②→③→④→⑤→⑥→终点

这里的①,②,③,④,⑤,⑥都是中途点,它们有严格的顺序．

【例 15】 已知对称轴平行于 y 轴的抛物线通过点$(-1, 18)$，且其顶点坐标为$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$，试确定抛物线方程。

本题的已知条件所提供的信息有：

1．抛物线的对称轴平行于 y 轴；

2．抛物线通过点$(-1, 18)$；

3．抛物线的顶点坐标为$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$.

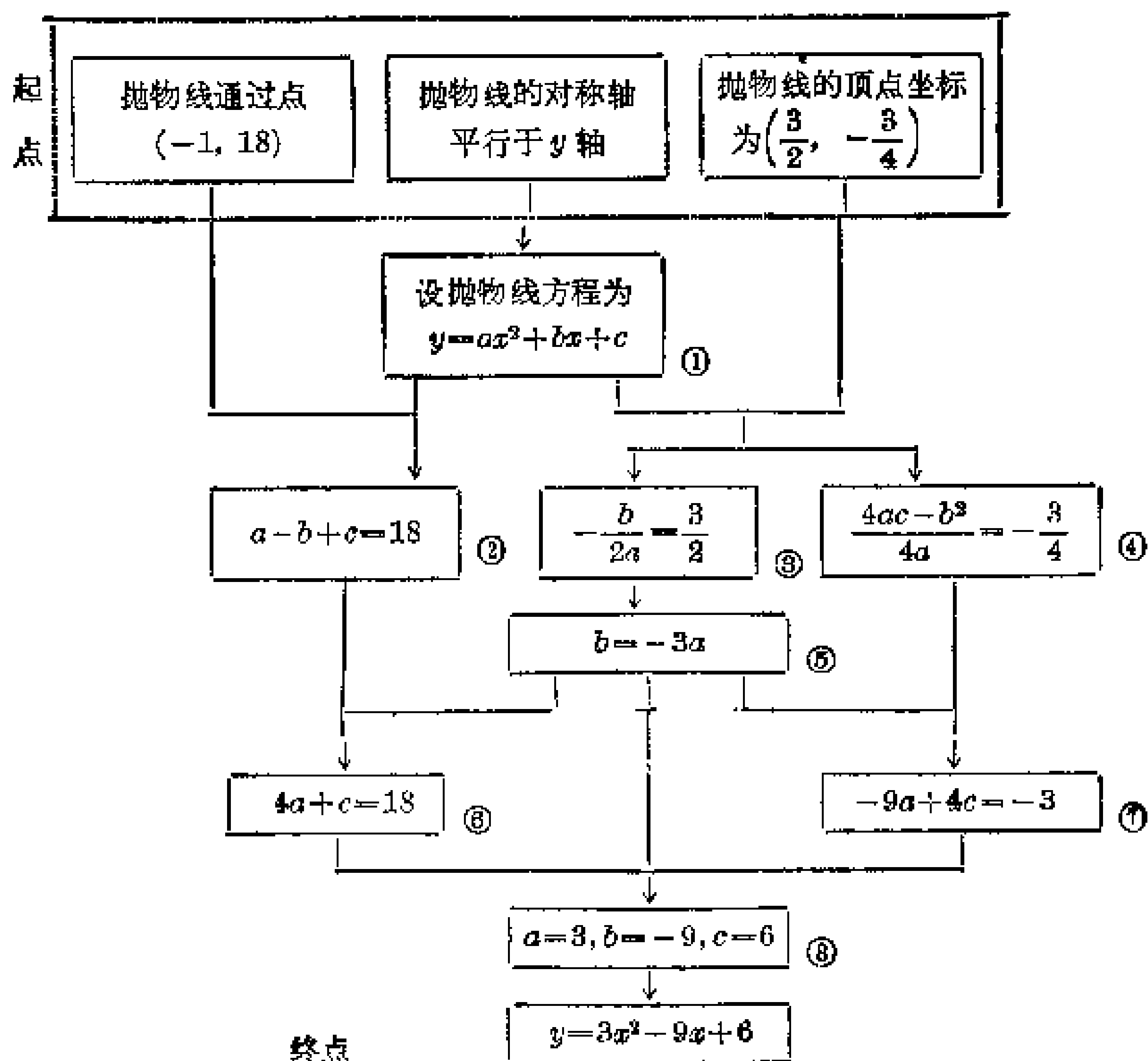
考虑到本题的终点是确定抛物线方程，所以应首先写出抛物线方程的一般表达式，而在上述信息中 1 是与此密切相关的，实际上对称轴平行于 y 轴的抛物线方程的一般表达式有三种：

(1) $y=ax^2+bx+c$;

(2) $y=a(x-x_1)(x-x_2)$，x_1，x_2 为抛物线与 x 轴交点的横坐标；

(3) $y=a(x-m)^2+k$, m, k 分别为抛物线的顶点的横坐标及纵坐标.

这就是说,从起点往下推,第一步就有三个可能的中途点. 如果选择(2), 由于无法利用已知条件中的其他信息, 所以解题难以继续进行下去. 因此, (2)并不是合适的中途点, 应舍弃, 以缩小搜索空间. 如果选择(1), 解题过程示意如下:

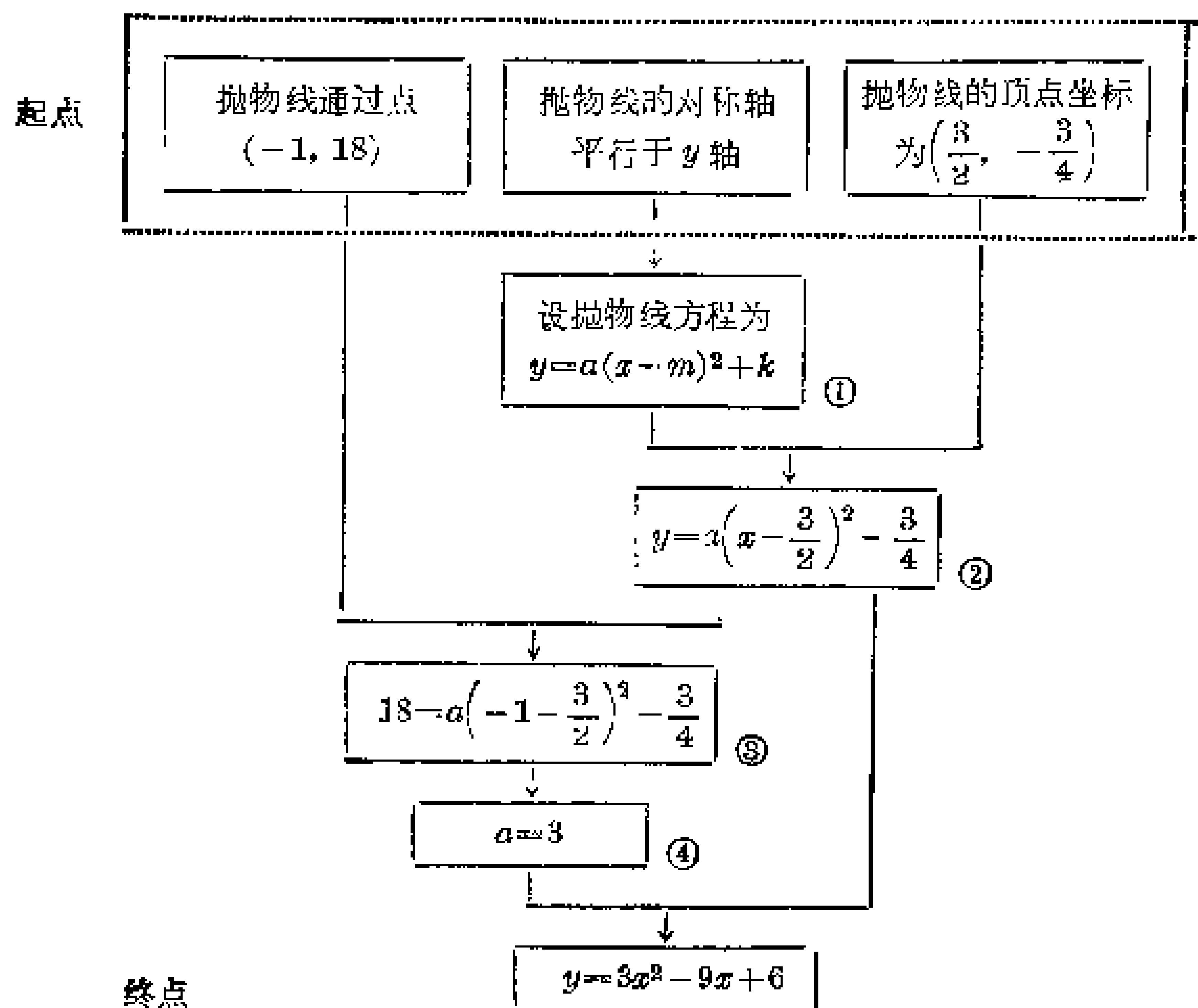


这里的 ①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥, ⑦, ⑧ 都是中途点, 它们排列的顺序并不是唯一的. 如下面就是连结起点和终点的两条不同的通路:

起点 → ① → ② → ③ → ⑤ → ⑥ → ④ → ⑦ → ⑧ → 终点

起点 → ① → ③ → ⑤ → ④ → ⑦ → ② → ⑥ → ⑧ → 终点

如果选择(3)，解题过程示意如下：



这里的①，②，③，④都是中途点，连结起点到终点的通路是：

起点→①→②→③→④→终点

这一解法简练、优美，行动序列的长度远较前一解法为短．那么主体如何才能选择(3)而找到好的解法呢？主要取决于以下三点：

1．主体的记忆中必须贮存有(1)，(2)，(3)这三种不同形式的抛物线方程，并且明确知道这三个方程中各参量的意义；

2．经过审题，主体必须联想这三个方程，并有把它们从长时记忆中提取出来使之处于工作状态的能力；

3．主体必须有强烈的减少以至消除方程中参量的目的意识．对已知条件中各因素的特点进行辨认后，能作出将"抛物线的

顶点坐标为$\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$”用于方程(3)，以便立即减少两个参量的判断.

中途点法是一种重要而又难于掌握的解题策略，运用这种策略能否取得成功，关键在于如何找到合适的中途点. 在上面两个例题中，我们看到综合-分析法、待定系数法实际上都是中途点法策略思想的运用，其他如数学归纳法、解难题时先给出引理等也都离不开中途点法策略思想.

第六节　以 退 求 进

解数学习题时，“先足够地退到我们所最容易看清楚问题的地方，认透了、钻深了，然后再上去.”[1]这就是以退求进的策略. 运用这一解题策略常见的情形有：从一般退到特殊，从复杂退到简单，从抽象退到具体，从多退到少，从整体退到部分，从较强的命题退到较弱的命题等. “一般性寓于特殊性之中”，窥一斑而识全豹，探讨数学习题的解题策略时，应当运用这些辩证思想.

【例 16】　如果正整数 $N(N>1)$ 的正约数的个数是奇数，求证 N 是完全平方数.

此题证明的方法并不显然，我们退一步先考察几个特殊的正整数，其中包括一些非完全平方数和一些完全平方数，观察它们的正约数的个数呈现什么规律，这些规律是怎样产生的？

通过下页的表我们发现，对非完全平方数来说，它们的正约数序列中，距首末两端等距离的两个正约数的乘积即为 N，如

$$12=1\times12=2\times6=3\times4;$$

对完全平方数来说，它们的正约数序列中，除了距首末两端等距离

[1]　华罗庚《谈谈与蜂房结构有关的数学问题》第 40 页，北京出版社 1979年 1 月第 1 版.

N		正　约　数	正约数的个数
非完全平方数	2	1, 2.	2
	3	1, 3,	2
	5	1, 5,	2
	6	1, 2, 3, 6,	4
	12	1, 2, 3, 4, 6, 12,	6
	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30,	8
	42	1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42,	8
完全平方数	4	1, 2, 4,	3
	9	1, 3, 9,	3
	16	1, 2, 4, 8, 16,	5
	25	1, 5, 25,	3
	36	1, 2, 3, 6, 12, 18, 36,	7
	196	1, 2, 4, 7, 14, 28, 49, 98, 196,	9

的两个正约数的乘积为 N 之外，中间还剩下一个正约数，如

$$36=1\times36=2\times18=3\times12=6^2.$$

反过来，我们也可以说，正约数的个数是偶数的正整数必为非完全平方数；正约数的个数是奇数的正整数必为完全平方数．得本题的证法如下：

设 a_i 为 N 的正约数，则 $\frac{N}{a_i}$ 必为 N 的正约数，如果 $a_i\neq\sqrt{N}$，则 $a_i\neq\frac{N}{a_i}$，现知 N 有奇数个正约数，这些正约数中凡是不等于 $\sqrt{N}$ 的 a_i 必有另一个不同的 $\frac{N}{a_i}$ 与它配成双，从而可知剩下的一个必等于 $\sqrt{N}$，所以 N 是完全平方数．

【例 17】　两个边长为 $2a$ 的相同的正方形，其中一个正方形的顶点是另一个的中心，求两正方形重叠部分的面积(图 5-13)．

从一般退到特殊，考虑两个正方形位置关系中的特殊情况，如图 5-14，使它们重叠部分为边长等于 a 的小正方形，就显示出所

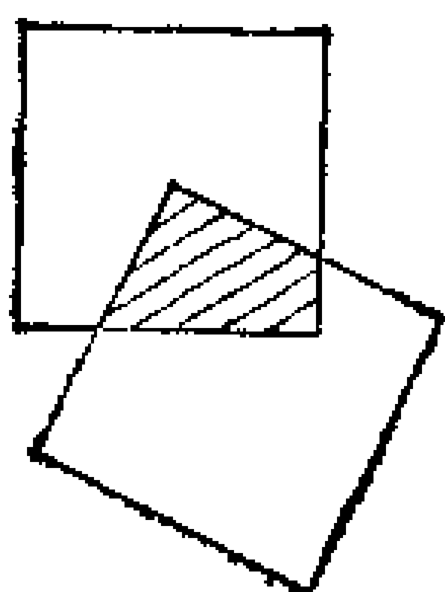


图 5-13

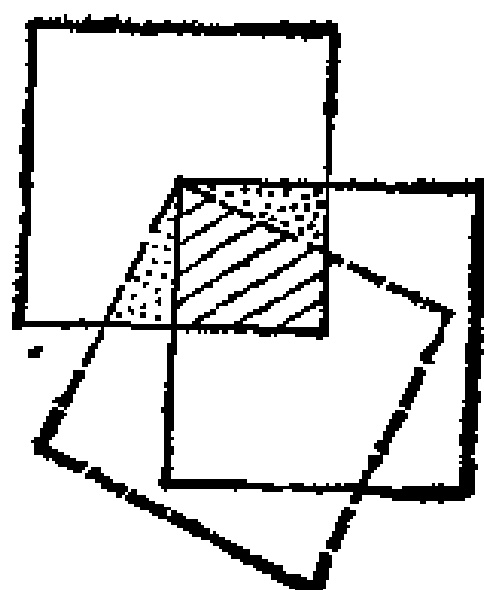


图 5-14

求的面积为 a^2，一出一入，证明的方法也一目了然.

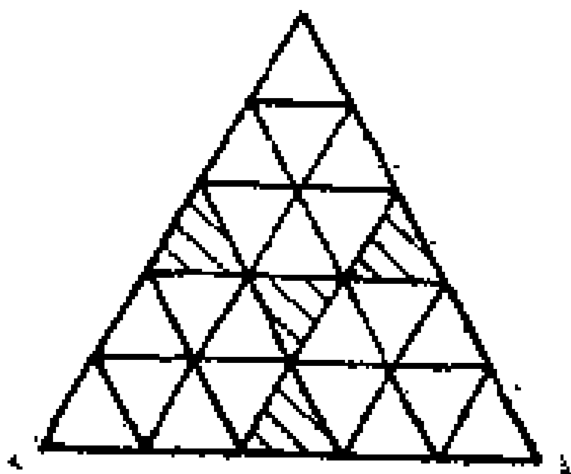
"特殊化是从对象的一个给定集合，转而考虑那包含在这集合内的较小的集合."[1]特殊化符合人们从具体到抽象的思维规律，一个问题在特殊情况下的解决孕育着这个问题在一般情况下的解决方法. 当然，特殊孕育着一般并不等于特殊可以代替一般，下面这个例子说明我们在运用特殊化这种解题策略时，还必须防止以偏概全的毛病，必须注意特殊化本身的局限性.

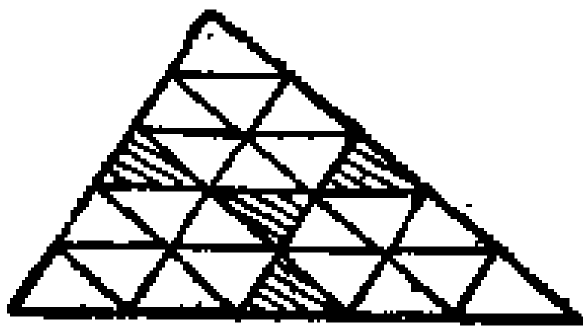
【例 18】 用三条割线把一个给定的三角形分成七个部分，其中四个是三角形，其余三个是五边形，这四个三角形中的一个被三条割线所包围，另外三个每一个都被给定的三角形的某一边和两条割线所包围，适当调整这三条割线使得四个三角形全等，问按照这种方法分割时每个三角形的面积是给定三角形面积的几分之几?

我们先将问题作特殊化的考虑，设给定的三角形是正三角形. 由于它的对称性，启发我们作出猜测：四个小三角形也将是正三角形，如果是这样，小三角形的边必定分别平行于给定的三角形，于是我们只要将给定的三角形的各边五等分，过各分点分别作另两

[1] G. 波利亚《数学与猜想(第一卷)》第12页，科学出版社1984年3月第1版.

边的平行线，如图 5-15，就得到了满足题目要求的特殊化了的图形．这里每一小三角形的面积是给定三角形面积的$\frac{1}{25}$．由此还可以得到满足题目要求的一般解答(图 5-16)．


图 5-15


图 5-16

上面这一解答看来似乎正确，实际上是不完善的，因为它只代表了本题应有的四种情况中的一种．为了得到满足题意的割线与三角形，我们可以先作四个全等的三角形，再延长适当的边得到题目中所"给定"的三角形和割线．根据四个小三角形的位置关系，以中间一个小三角形为基准，产生下列四种情况：

(1) 另三个小三角形由基准三角形分别绕三个顶点旋转180°得到，如图 5-17；

(2) 另三个小三角形中，两个由基准三角形分别绕两个顶点旋转 180° 得到，另一个则由基准三角形翻转而成，如图 5-18；

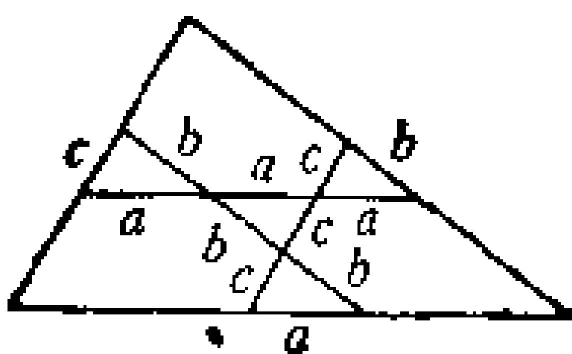


图 5-17

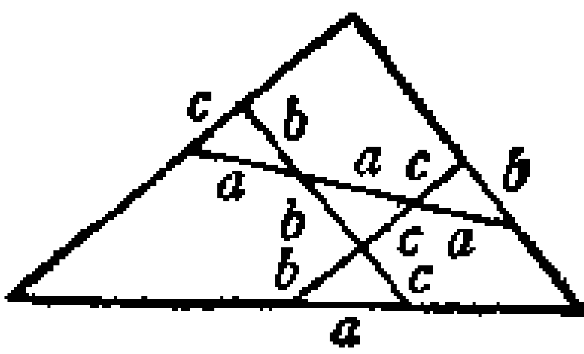


图 5-18

(3) 另三个小三角形中，一个由基准三角形绕一个顶点旋转 180° 得到，另两个由基准三角形翻转而成，如图 5-19；

(4) 三个小三角形都由基准三角形翻转而成，如图 5-20．



图 5-19

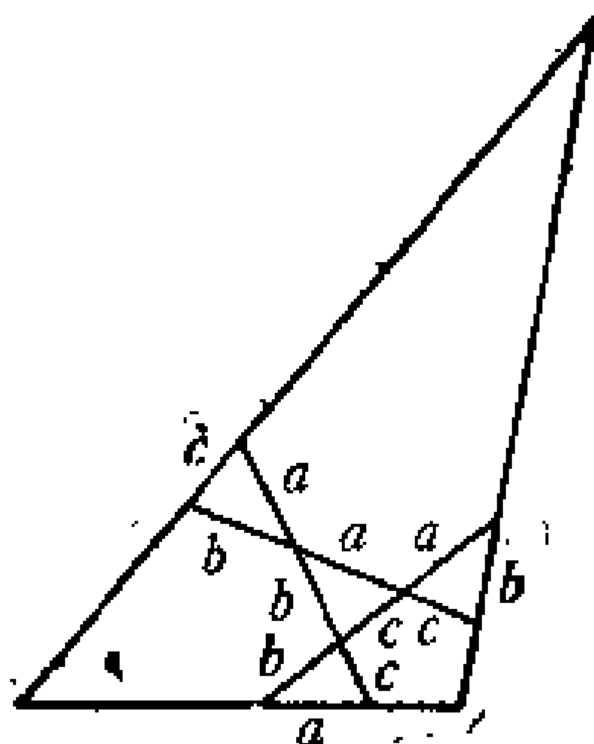


图 5-20

在上述四种情况下，所求的面积的比分别为：

(1) $\frac{1}{25}$； (2) $\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{2c}{b}+\dfrac{2b}{c}\right)^2}$；

(3) $\dfrac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{(2b^2+2c^2-a^2+ab+ac)^2}$；

(4) $\dfrac{1}{\dfrac{(a+b+c)^3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}-2}$. [1]

下面再用两个例子说明不同情况下以退求进解题策略的运用。

【例19】 已知 $0<a, b, c, d, e<1$，求证 $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)(1-e)>1-(a+b+c+d+e)$.

这是一道含有5个变元的不等式证明题，为了寻求具体解题方法，采取以退求进的策略，考虑变元较少时的情形。

如果变元只有2个，有

$$(1-a)(1-b)=1-(a+b)+ab,$$

因为 $a, b>0$，所以 $ab>0$，从而得

[1] 郑淑娟《本刊一个例题解答不够完善》，《中学数学教学》1988年第4期。

$$(1-a)(1-b)>1-(a+b);$$

如果变元增加到3个，可利用上面结果，在上式两边都乘以$(1-c)>0$，得

$$(1-a)(1-b)(1-c)>[1-(a+b)](1-c)>1-[(a+b)+c]$$
$$=1-(a+b+c).$$

由此可看出，要证明原式，只要在此基础上，在不等式两边依次乘以$(1-d)$，$(1-e)$即可。

【例20】 在给定的锐角三角形ABC中，求作一个正方形$DEFG$，使D，E两点落在BC上，F，G两点分别落在AC，AB上。

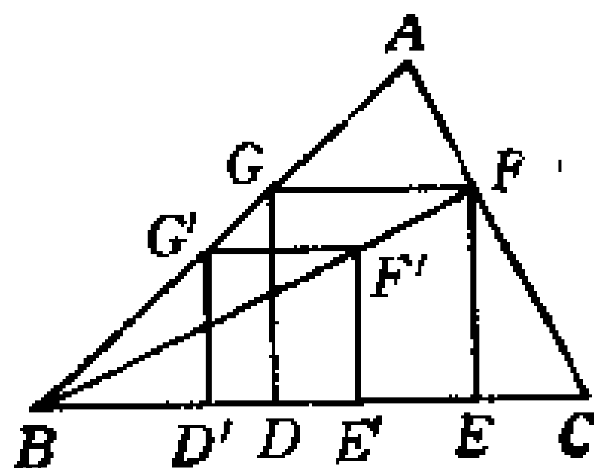


图 5-21

让我们去掉题目中的一些条件，把一个较强的题目变为一个较弱的问题，比如说先作出一个三角形，使其三个顶点落在三角形的两边上，看来这是容易解决的，如图5-21中的$D'E'F'G'$。进一步考虑能否以此为跳板，最终解决原来的问题？问题已不太困难，只要以B点为位似中心，作一个位似变换，便可以在AC上确定F点的位置（延长BF'交AC于F），从而作出所要求的正方形$DEFG$.

第七节　推进到一般

本节要谈的解题策略，其思路恰好与上节相反。即我们要解决的是一个特殊问题，先将这个问题作一般化的探讨，通过一般问题的解决，来达到目的．对于这种解题策略，波利亚曾经说道："这看起来矛盾，但当从一个问题过渡到另一个，我们常常看到，新的雄心大的问题比原问题更容易掌握．较多的问题可能比只有一个问题更容易回答．较复杂的定理可能更容易证明，较普遍的问

题可能更容易解决."[1]

【例 21】 证明 $50^{99}>99!$

此题左、右两边都是天文数字，如果不进而推导出更为一般的关系式，是很难解决的．观察两个数 50 与 99，不难想到具有关系 $\frac{99+1}{2}=50$，由此，我们进一步猜想，下列关系是否成立：

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n>n! \quad (n\text{ 为奇数})$$

事实上

$$\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}>\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot n}=\sqrt[n]{n!},$$

即

$$\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{n}>\sqrt[n]{n!},$$

$$\frac{n+1}{2}>\sqrt[n]{n!},$$

$$\therefore\quad \left(\frac{n+1}{2}\right)^n>n!.$$

取 $n=99$，就证明了 $50^{99}>99!$

【例 22】 求 $S_n=C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\cdots$

先考虑一个比 S_n 更为复杂的和，

$$P_n=C_n^0+C_n^1i+C_n^2i^2+C_n^3i^3+\cdots+C_n^ni^n.$$

实际上 $$P_n=(1+i)^n=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

而 $$P_n=(C_n^0-C_n^2+C_n^4-\cdots)+(C_n^1-C_n^3+C_n^5-\cdots)i$$

$$=S_n+(C_n^1-C_n^3+C_n^5-\cdots)i.$$

由复数相等的意义，得

$$S_n=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

[1] G.波利亚《怎样解题》第 121～122 页，科学出版社 1982年 1 月第 1 版.

以进求退策略的最典型运用，是某些用递推方法解决的例子。

【例 23】 平面上有 100 个圆，其中每两个圆都相交于两点，且任何三个圆都不相交于同一点，问这些圆把平面分成多少部分？

我们把问题推进到一般情形，设平面上 n 个圆，其中每两个圆都相交于两点，且任何三个圆都不相交于同一点，这 n 个把平面分成 $F(n)$ 个部分，现在来导出递推关系。

平面已经有 $n-1$ 个圆，在此基础上增添一个圆，这第 n 个圆与原来的 $n-1$ 个圆必有 $2(n-1)$ 个交点，也就是说第 n 个圆的圆周被这些交点分割成 $2(n-1)$ 段弧，于是增添第 n 个圆之后，平面被这些圆所分成的部分多了 $2(n-1)$ 个。这样就得到递推关系

$$F(n)=F(n-1)+2(n-1).$$

考虑：

$$F(1)=2;$$
$$F(2)=F(1)+2\times 1;$$
$$F(3)=F(2)+2\times 2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$F(n-1)=F(n-2)+2(n-2);$$
$$F(n)=F(n-1)+2(n-1).$$

将上面 n 个式相加，即得

$$F(n)=2+2[1+2+\cdots+(n-1)]=2+n(n-1)=n^2-n+2.$$

取 $n=100$，即得 $F(100)=9902$.

【例 24】 赌徒甲、乙各有赌本 50 元、20 元，他们以掷一个硬币赌搏，规定每掷一次，若正面朝上则甲付给乙 1 元，反之，则乙付给甲 1 元。如此继续下去，直至一赌徒输光。求下列事件的概率：(1) 甲输光；(2) 乙输光；(3) 永不停止。

用递推关系来解题。设当赌至赌徒甲有 n 元而乙有 $(70-n)$ 元时，甲输光的概率为 $p(n)$，乙输光的概率为 $q(n)$，然后把问题的条件用以建立递推关系。显然，这时再掷一次，甲增至 $(n+1)$ 元或

减至$(n-1)$元的概率各为$\frac{1}{2}$，所以

$$p(n)=\frac{1}{2}p(n+1)+\frac{1}{2}p(n-1);$$

$$q(n)=\frac{1}{2}q(n+1)+\frac{1}{2}q(n-1).$$

于是由$p(n+1)-p(n)=p(n)-p(n-1)$，知$p(n)$是等差数列，又已知$p(0)=1$，$p(70)=0$，所以$p(n)=1-\frac{n}{70}$.类似地可得$q(n)=\frac{n}{70}$. 于是我们得到：

(1) 甲输光的概率$p(50)=1-\frac{50}{70}=\frac{2}{7}$；

(2) 乙输光的概率$q(50)=\frac{50}{70}=\frac{5}{7}$；

(3) 永不停止的概率为$1-p(50)-q(50)=0$.

从以上二例可以看出，对于一些求总量的问题，如果问题的条件描述了它的逐步变化规则，那么用推进到一般的策略，通过建立递推关系求解往往是有效的.

第八节　从整体看问题

对于数学习题，不是分解它的条件和结论，采取各个击破的方法，而是从整体看问题，向着既定的目标逐步推进，以达到最终解决问题的目的. 这种解题策略使我们能够全局地把握条件和结论的联系，摆脱局部细节中一时难以弄清的数量关系的纠缠，使眼界更加开阔.

【例 25】 求复数$z_1=1+\cos\theta+i\sin\theta$与$z_2=1-\cos\theta+i\sin\theta$的辐角之和与模的平方和.

此题如果采取各个击破的方法，就要分别求出z_1与z_2的辐角和模，这样做，结果将引进极其繁琐的讨论，给问题的解决带来极

大的困难. 如果从整体看问题，考虑到"两个复数的积的辐角等于这两个复数的辐角的和"，那么问题很快得到解决.

$$z_1 \cdot z_2 = (1+\cos\theta+i\sin\theta)(1-\cos\theta+i\sin\theta) = 2i\sin\theta.$$

于是可得

当 $\theta=k\pi(k\in Z)$ 时，$z_1z_2=0$，z_1 与 z_2 的辐角之和可为任意值；

当 $(2k-1)\pi<\theta<2k\pi(k\in Z)$ 时，z_1 与 z_2 的辐角之和为 $2n\pi+\frac{3\pi}{2}(n\in Z)$；

当 $2k\pi<\theta<(2k+1)\pi(k\in Z)$ 时，z_1 与 z_2 的辐角之和为 $2n\pi+\frac{\pi}{2}(n\in Z)$.

至于 z_1 与 z_2 的模的平方和，也应从整体考虑，一步到位.

$$|z_1|^2+|z_2|^2=[(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta]+[(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta]$$
$$=4.$$

【例 26】 已知 $x^2-4x+1=0$，求 $x^4+\frac{1}{x^4}$.

此题应避免由已知条件求出 x，然后代入的方法，而应运用整体求值的策略.

设 $x^4+\frac{1}{x^4}=T$，则 $x^8=T\cdot x^4-1$. ①

由已知得 $x^2+1=4x$，两边平方并整理，得 $x^4+1=14x^2$. 此式两边再平方并整理，得

$$x^8=194x^4-1.$$

此式与 ① 比较，得 $T=194$.

【例 27】 对于一切大于 1 的自然数 n，证明：

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)>\frac{1}{2}\sqrt{2n+1}.$$

此题解法较多，如运用数学归纳法，一般人容易想到的，但推证起来并不轻松. 从整体看问题，可得一个十分简洁的解法.

设 $A=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\cdots\cdot\frac{2n}{2n-1}$,

$$B=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}.$$

易见 $A>B$. 于是有

$$A^2>AB=\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ \cdots\cdot\ \frac{2n}{2n-1}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n+1}{2n}\right)$$

$$=\frac{2n+1}{3}>\frac{2n+1}{4}.$$

$$\therefore\quad A>\frac{1}{2}\sqrt{2n+1}.$$

【例 28】 设复数 α, β, γ 满足 $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$. 证明 $\omega=(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)/\alpha\beta\gamma$ 为实数.

我们不必分别去考虑 α, β, γ 的实部与虚部，而是运用性质: "$z\bar{z}=|z|^2$"得 $\alpha=\frac{1}{\bar{\alpha}}$, $\beta=\frac{1}{\bar{\beta}}$, $\gamma=\frac{1}{\bar{\gamma}}$, 并对 ω 的整体施行变换，有

$$\omega=\left(\frac{1}{\bar{\beta}}+\frac{1}{\bar{\gamma}}\right)\left(\frac{1}{\bar{\gamma}}+\frac{1}{\bar{\alpha}}\right)\left(\frac{1}{\bar{\alpha}}+\frac{1}{\bar{\beta}}\right)\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}$$
$$=(\bar{\beta}+\bar{\gamma})(\gamma+\bar{\alpha})(\bar{\alpha}+\bar{\beta})/\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}=\bar{\omega}$$

这就证明了 ω 为实数.

从整体看问题才能看清问题的全貌，更深刻地洞察其中的规律.

【例 29】 一个六位数记为 $2abcde$, 其中 a, b, c, d, e 都表示数字，将此数乘以 3 得新数恰为 $abcde2$, 试求此数.

此题不可分别去求 a, b, c, d, e, 而应整体地设 $x=abcde$, 则原数为 $200000+x$, 新数为 $10x+2$. 依题有

$$3(200000+x)=10x+2.$$

解得 $x=85714$.

故所求的数为 285714.

【例 30】 8 只杯子，其中 5 只杯口朝上，3 只杯口朝下，现在

每次可任意翻转其中4只.问能否经有限次翻转,使所有杯子的杯口朝向相同?

将问题数值化,设某只杯子杯口朝上的状态用+1表示,杯口朝下的状态用 −1 表示.总体上看,几只杯子杯口的朝向状态用各杯子的朝向状态值的乘积表示,则8只杯子的杯口朝向状态的起始值为 $1^5\times(-1)^3=-1$,于是本题就转化为是否可经过有限次动作——翻转其中任意4只,使8只杯子的杯口朝向状态值变为1.

事实上,由于翻转1只杯子,不论是杯口由朝上(+1)变为朝下(−1),还是由朝下(−1)变为朝上(+1),8只杯子的杯口朝向状态值都要乘以(−1),现每次要求翻转4只,$(-1)^4=+1$,所以每经过这样一次动作,8只杯子的杯口朝向状态值都不发生变化,因此无论经过多少次动作,8只杯子的杯口朝向都不会相同.也就是说问题得到了否定的回答.

第九节　正难则反

在数学发展史上,对于某些数学问题,当从正面思考难以解决时人们就转向反面思考,当用直接解法不能奏效时就转用间接证法,当命题难以被证明时就转而举反例加以否定.这种对数学问题正面解决有困难面转向反面寻求解法的策略,在数学习题中的运用称为正难则反(田隆岗,1986),或者称为逆向思维原则(曾晓新,1985)、逆反转换原则(南秀全,1988).

欧几里得《原本》问世之后,对于其中第五公设(即平行公理),数学家们在长达两千年之久的历史进程中,一代又一代地企图给出正面的证明,直到十九世纪,才由罗巴切夫斯基和波尔约通过反面思考加以解决,即欧氏的平行公理是不能逻辑地被证明的,罗巴

切夫斯基和波尔约都提出各自的平行公理，独立地发现了非欧几何学的崭新天地.

"平面上有 n 个点，不全在一直线上，证明总可以找到一条直线，使它只通过 n 个点中的两个点. "对于这样一个问题，十九世纪英国大数学家西尔维斯特曾经感到困惑，他去世后有人用反证法解出来. 证明过程如下：

众所周知，直线外一点到该直线的距离是唯一确定的. 连结这 n 个点得 m 条直线，必有 $m>1$. 因为 n、m 都是有限自然数，所以从 n 个点到 m 条直线的距离也是有限条数. 设某点 T 到某一条直线 l 的距离是所有这些距离中最小的一个(如果不唯一，也不影响以下结论)，那么 l 就是满足题目要求的直线. 用反证法. 如图 5-22，设 $TR\perp l$，R 为垂足，又设 l 上有不少于 3 个点，则在 R 的同一侧至少有 2 个点，设为 A，B(A 与 R 可以重合)，且有 $BR>AR$，连结 TB，作 $RD\perp TB$，$AC\perp TB$，则 $AC<RD<TR$，与前设矛盾，这就证明了 l 只通过 n 个点中的两个点.

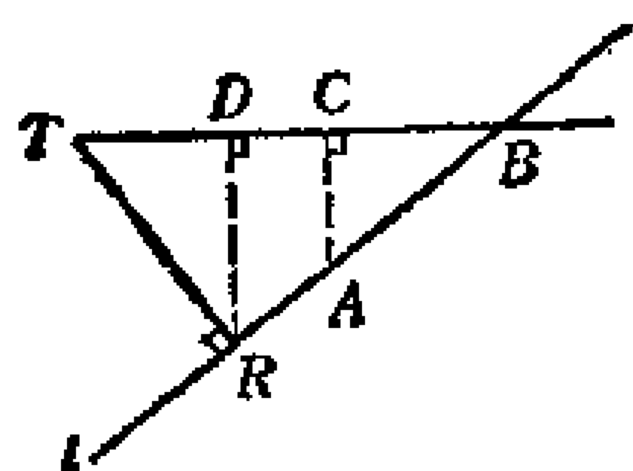


图 5-22

欧学习题的正难则反解题策略，在运用时常有以下几种形式.

一、反证法

反证法是数学命题的一种间接证法. 其依据是形式逻辑中的"排中律"与"矛盾律"，这种方法是通过证明题断的反面不能成立，从而肯定题断的正面成立. 有关"存在性"、"否定性"、"无限性"的命题，应用反证法的情况较多. 有些命题其逆命题已得到证明，也可考虑采用反证法. 如前面所介绍的是一个"存在性"命题，下面再举一个"否定性"命题的例子.

【例 31】 已知 a，b，c 都是小于 1 的正数. 求证：乘积(1－

$a)b$，$(1-b)c$，$(1-c)a$ 不能同时大于 $\frac{1}{4}$．

证明三个乘积不能同时大于 $\frac{1}{4}$ 这是比较困难的，我们转而去证明它的反面为假．即设

$$(1-a)b>\frac{1}{4},\quad (1-b)c>\frac{1}{4},\quad (1-c)a>\frac{1}{4}.$$

以上第一式两边同乘以 a，得

$$(1-a)ab>\frac{a}{4}, \tag{①}$$

考虑到 $(1-a)a\leqslant\left[\frac{(1-a)+a}{2}\right]^2=\frac{1}{4}$，两边同乘以 b，得

$$(1-a)ab\leqslant\frac{b}{4}. \tag{②}$$

由①，②，得 $\frac{a}{4}<\frac{b}{4}$，即 $a<b$．

类似地可得 $b<c$，$c<a$．

综合以上结果有 $a<b<c<a$．

这显然是不成立的，故原命题正确．

反证法的证题步骤有三：反设；归谬；存真．其中归谬的情况主要有：

1．与公理、定义矛盾；

2．与已知定理矛盾；

3．自相矛盾；

4．与命题题设矛盾；

5．与所作假设矛盾．

二、淘汰法

米中有砂子混杂，要把米粒和砂子分开，一种方法是将米粒挑出来，另一种方法是把砂子淘出去．淘汰法就是考虑某个问题中的一切情形，通过去掉其中不合要求的部分，而得到合乎要求的部

分的一种解题方法. 淘汰法也称为排除法.

【例 32】 某种大炮击中目标的概率是 0.3, 只要以多少门这样的大炮同时射击一次,就可以使击中目标的概率超过 95%?

设儿门大炮同时射击一次,就可以击中目标,为了求这一事件的概率,运用淘汰法:先求出事件"n 门大炮同时射击一次,其中没有一门大炮击中目标"的概率, 即为 $(1-0.3)^n$. 于是得击中目标的概率为 $P=1-(1-0.3)^n$. 由题意 $1-(1-0.3)^n>95\%$,

$$(0.7)^n<0.05.$$

$$\therefore \quad n>\frac{\lg 0.05}{\lg 0.7}\approx 8.399.$$

取过剩近似值,得 $n=9$. 故只要以 9 门大炮同时射击一次, 就可使击中目标的概率超过 95%.

三、逆推法

把问题发生的顺序倒过来,从结论开始,执果索因,逆向推导,逐步还原, 以求问题的解决. 这种方法称为逆推法. 分析法就是逆推法的一种常见形式.

【例 33】 甲、乙、丙三人在一起赌博,每赌一次都是一人输两人赢. 约定输者要付给赢者一定的钱, 其所付数目等于每个赢者当时所有的钱. 他们共赌了三场,正好甲、乙、丙每人依次输一场. 结束时他们每人都有 8 元钱,问开始赌博时每人各有钱几元?

用逆推法解.从结束时三人的钱数开始,逆向上推,列表如下:

时　刻	甲	乙	丙
第三场结束	8	8	8
第二场结束	4	4	16
第一场结束	2	14	8
开　始	13	7	4

四、常量与变元的换位

在解决有关变元的问题时，由于思维定势的影响，人们总是习惯于抓住变元不放，这在很多情况下是正确的，但在抓住变元解题较为困难，甚至产生难以克服的障碍时，也可考虑采取常量与变元换位的策略.

【例 34】 解方程

$$x^3+2\sqrt{5}x^2+5x+\sqrt{5}-1=0.$$

此题按解三次方程的方法求解，相当困难. 如根据题目特点，把常量$\sqrt{5}$看作“未知数”，x看作常量，则得关于$\sqrt{5}$的“一元二次方程”：

$$x(\sqrt{5})^2+(2x^2+1)\sqrt{5}+(x^3-1)=0.$$

解之，得 $\sqrt{5}=1-x,\ -\dfrac{x^2+x+1}{x}.\ (x\neq0)$

$$\therefore\quad x=1-\sqrt{5},\ \frac{-(\sqrt{5}+1)\pm\sqrt{2\sqrt{5}+2}}{2}.$$

【例 35】 解关于 x, y, z 的方程组

$$\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=0; \\ x+by+b^2z+b^3=0; \\ x+cy+c^2z+c^3=0. \end{cases}$$

此题一般用克莱姆法则解之，但较为麻烦. 观察它的特点，三个方程的形式完全一样，如果把 x, y, z 看作常量，则 a, b, c 恰好是下列方程的根：

$$t^3+zt^2+yt+x=0.$$

在这里，x, y, z 是关于未知数 t 的方程的系数. 根据根与系数的关系，立即得

$$\begin{cases} a+b+c=-z; \\ ab+bc+ca=y; \\ abc=-x. \end{cases}$$

故原方程的解为$\begin{cases} x=-abc; \\ y=ab+bc+ca; \\ z=-(a+b+c). \end{cases}$

五、构造反例

在数学发展史上，数学家根据若干数学对象的分析、比较、联想、归纳，而产生对一类数学对象的规律和本质的一种猜想（或称假说）。如费马猜想（费马大定理）、哥德巴赫猜想、黎曼猜想等等。对于众多的猜想，人们一方面从正向寻求证明，另一方面从逆向构造反例。正如盖尔鲍姆(Gelbaum)所说："冒着过于简单化的风险，我们可以说（避开定义、陈述以及艰苦的工作不谈）数学由两大类——证明和反例组成，而数学的发现也是朝着这两主要目标——提出证明和构造反例。"有人甚至认为，选数学人才的方法就是，面对一个数学命题他是否马上试图找出一个反例来驳斥它。

【例 36】 已知在$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$中，$AB=A_1B_1$，$BC=B_1C_1$，$\angle BAC=\angle B_1A_1C_1=70°$，试问$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$全等吗？为什么？

由于题设不满足三角形全等判定定理，我们试图构造反例来否定结论。如图 5-23，在$\triangle ABC$中$\angle BAC=70°$，不妨设$\angle BCA$是大于$70°$的锐角，BD为AC边上的高，将BC沿BD翻折，设C点落在AD上的C'点，于是在$\triangle ABC$和$\triangle ABC'$中，显然有

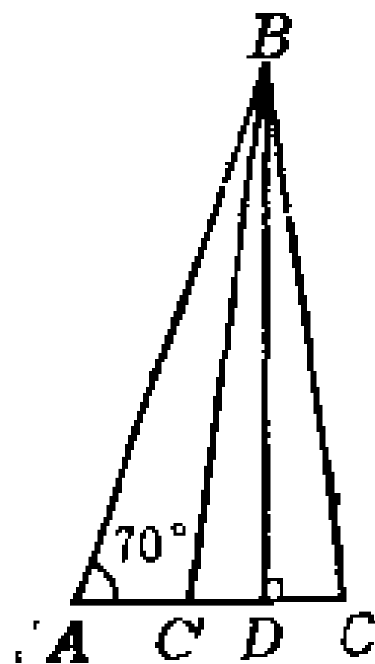


图 5-23

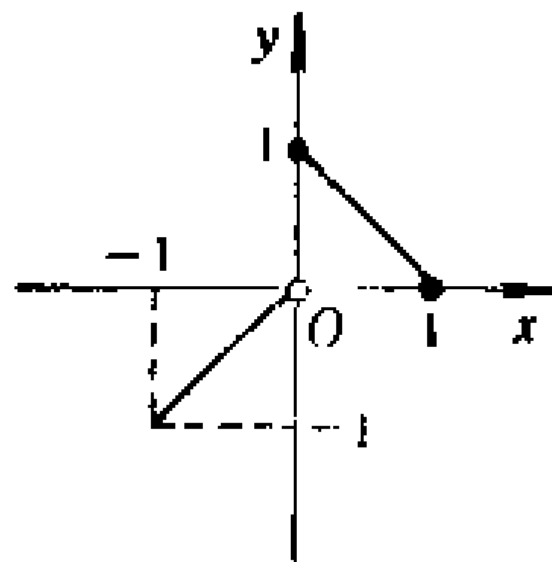


图 5-24

$AB=AB$, $BC=BC'$, $\angle A=\angle A$，但这两个三角形并不是全等的．这样就构造出否定结论的反例．

【例 37】 函数 $f(x)$ 在定义域 $[a, b]$ 上存在反函数的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调．对吗？

$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调是 $f(x)$ 在定义域 $[a, b]$ 上存在反函数的充分条件，但是命题："$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调是 $f(x)$ 在定义域 $[a, b]$ 上存在反函数的必要条件"并不正确．对这一点，我们可联系函数 $f(x)$ 与其反函数 $f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称来构造反例．

如图 5-24，定义在 $[-1, 1]$ 上的函数 $f(x)=\begin{cases}x; & [-1, 0)\\ 1-x, & [0, 1]\end{cases}$ 在定义域上并不单调，但其反函数即为自身．

第十节 解题策略的可训练性

制定解题策略的技能的可训练性，是数学理论界存在着争议并且迄未得到清晰叙述的问题，其原因是解题策略的发现过程，虽然有逻辑推理的参加，但是整体上还是直觉性的，而对于直觉思维，到目前为止关于它的产生机制我们仍知之甚少，以至于某些学者不得不把直觉看成是不可解释的．另一个原因是不少教师和研究人员，往往将个别的解题实践或是短期的实验研究结果，简单地推演到一般的、长期的解题活动中去，从而令人感到说服力不强．

我们认为，解题策略的发现虽然在整体上是直觉性的，但是绝不是一种纯主观的思维活动，它是主体在认识真理通向问题解决的道路上的一个思维环节，在这个环节中，大脑进行着活跃的观察、尝试、猜想、归纳、比较、推理和判断等活动，在目的性、相似性、和谐性、开放性和批判性等指向原则的引导下，形成解决问题方法的宏观判断，这种思维过程虽然为时甚短，但完全有其客观基础，

这就是主体的已有经验、知识与问题情境的同化.

一个良好的解题策略的形成取决于三个因素:

(一) *知识结构* 任何解题策略的产生都离不开主体已有的数学概念、法则、定理、由基本题型形成的"知识块"及解题基本方法等,离不开主体的知识结构与问题情境的相互作用.一个没有地质知识的人看一块岩石必定看不出什么东西.一个没有适当数学知识基础的人,接触一个数学习题,当然不可能产生解题策略.如本章第一节例1托勒密定理的多种解题策略的发现是以众多的几何的、代数的和三角的知识为基础的.

直觉思维可分为经验性直觉和理性直觉两种类型,前者更多地是揭露事物的外部特征与外部联系,因而水平较低;后者指建立在科学知识和能娴熟地运用各种思维方法的基础上的直觉,常常能洞察事物的本质与内在联系.数学习题解题策略的发现过程,当然两种直觉都有,但以理性直觉为主.理性直觉的形成的心理机制是:在感性知识、经验的基础上,主体通过一系列分析、综合活动,在头脑中形成一些科学结论,主体在并不意识结论的形成过程的情况下,以这些结论为背景运用娴熟的思维方法,将其中的推理过程压缩到最低限度,迅速地得出判断.数学习题解题策略就是这样在理性分析基础上产生的直觉判断.正如庞卡莱所说:这种不自觉的工作(指直觉)必须在"自觉的工作(意识的工作)之中才有意义".

(二) *信息加工方式* 即思维能力,主要指归纳、类比、想象等发散思维能力.主体在接触数学习题之后,就需要将所接收的信息和从长期记忆中所提取的信息作出各种可能的新的组合,而面对多种可供选择的道路,庞卡莱说:"逻辑可以告诉我们走这条路或那条路保证不遇到任何障碍,但它不能告诉我们哪一条道路能引导我们达到目的地.为此,必须从远处了望目标,而教导我们了望本

领的是直觉."思维的发散性，使输入大脑的信息，避免在不变的逻辑通道上运行，通过不断地反馈调节，在开放系统中寻求新的感性经验和理论知识，不断地开拓一切可能的道路，使得全部信息的熵不断地减少，达到最佳组合，从而发生格式塔转换，形成良好的解题策略．正如徐利治所指出："数学创造往往开始于不严格的发散思维，而继之以严格的逻辑分析思维，即收敛思维．"[1]他提出一个公式：

创造能力=知识量×发散思维能力．[1]

（三）非智力因素　即注意力、集中性、坚持性、灵活性、动机、态度等心理品质和人格特征的个别差异，这些因素都对解题策略的形成过程产生影响．我国古代传说中"仓颉见鸟迹而知著书"，"太昊师蜘蛛而结网"，这固然和想象能力、类比能力有关，也和注意力及动机分不开．探讨数学习题的解题策略，能够提高人的意志和品德，这要求解题人有必要的胆量和正确的态度．就欧拉出色地解决了伯努利的求级数的和问题，波利亚评论说："欧拉成功的决定性因素是大胆．"对于一个未经证实的猜想（解题策略就是这样一种方法的猜想），波利亚累次告诫我们：不要轻易地信以为真．还强调地指出：

"第一，我们应当随时准备修正我们的任何一个信念．

第二，如果有一种理由，非使我们改变信念不可，我们就应该改变信念．

第三，如果没有某种充分的理由，我们不应当轻率地改变一个信念．"

对于这些听起来非常平凡的话，波利亚认为实行起来"却需要有相当不寻常的品质"．第一点需要有"理智上的勇气"；第二点需

---

[1] 徐利治《数学方法论选讲》第182页，华中工学院出版社1983年4月第1版．

要有“理智上的诚实”；第三点需要有“明智的克制”．[1]

这些都说明非智力因素在形成数学解题策略中的作用．

解题策略的形成既然有其客观基础，那么进一步我们又要问：这一过程能否逻辑化、模式化呢？作为训练制定解题策略的技能的需要，我们希望其答案是肯定的．但是，我们发现事实上这并不是一个容易的问题，特别是当我们的回答必须和主体——解答习题的学生的知识和能力发展水平联系起来时更将是这样．下面分两层意思来谈：

第一，就某个局部范围的数学习题来说，解题策略的形成过程是可能逻辑化、模式化的．这是因为就局部范围的题目讨论，如果考虑到学生的知识是有限的，那么这个范围内题目的解题策略个数将是不多的．在探讨过程中，其可能选择的策略个数也将是有限的．因此我们可能通过逐一考虑这些题目的解题策略，寻求它们的一般规律，提出一个逻辑化、模式化的方案．如我国著名数学家吴文俊，就三种不同类型的平面几何定理，在一些假定之下，提出了“可以用三种机械化方法来证明”的论断，但是他也谈到“虽然本书展示了不少可以机械化的几何，但决不是任意一种几何都可以机械化”，他还推测：“Desargues 几何不能机械化．”[2]

诚然，我们作出某个局部范围的数学习题解题策略的形成过程可能逻辑化、模式化的论断，并不意味着我们已经找到或目前已具备逻辑化、模式化的方法，但这个论断确实可以引导教师对某个或某类数学习题的解题策略的发现，作出尽可能的程序式的分解．

第二，就全部数学习题来说，其解题策略形成过程能否逻辑化、模式化问题，几乎与计算机能否代替大脑的问题相当．对于这

[1] G.波利亚《数学与猜想(第一卷)》第 7 页，科学出版社 1984 年 3 月第 1 版．

[2] 吴文俊《几何定理机器证明的基本原理(初等几何部分)》第 vi～viii 页，科学出版社 1984 年 8 月第 1 版．

样一个人工智能众说纷纭的问题，当然不是本书所能够解决的，就目前的情况来看，我们对解题策略形成过程的探讨的水平还是很低的，正如计算机的智能水平也是很低的一样. 但是在二值逻辑的基础上，随着多值逻辑、概率逻辑、模态逻辑、模糊逻辑和辩证逻辑等的发展，和对思维的选择机智逻辑化工作的进展，计算机潜在的智力极限实际上已经被一些巧妙的算法所克服，我们甚至可以期望，机器能够智能化，机器能够"创造".

现在让我们转到正题，即解题策略技能的可训练性问题上来，对这个问题的讨论当然和形成良好解题策略的因素及解题策略形成过程的程序化有密切的关系. M. 崩格说过："直觉必须经过培养"，数学习题解题策略技能的提高是否存在着短期训练程序呢？我国和美国、西德等国在每年一度的国际数学奥林匹克(IMO)开赛之前，都将选手集中起来进行短期训练，其目的主要是提高解题策略技能，这种短期训练事实上是非常有效的，不过由于参加这种训练的选手乃是从全国各地通过层层筛选得到的学生，当然缺乏代表性，而且这些选手他们往往已经过三年甚至更多年的精心培训. 所以他们成功不能看成仅仅归结为短期训练的效果. 一般说来，企图在短期内提高解题策略技能的训练程序，是难以取得成功的. 长期训练程序则不然，W. A. 威克尔格伦曾在美国麻省理工学院开过三年讲授解题技巧的课，R.S. 克拉奇菲尔德、M.V. 科文顿等人从1967年起，用一个名叫"创造思维程序"的设计，开展有关训练学生解决问题的研究，历时六年之久. 这些都取得了显著的效果. 我国中学数学教学经验和研究成果告诉我们，数学解题策略技能的提高，要与数学知识教学和一般解题方法密切地结合起来，主要有以下六点：

（一）授予学生数学各科的基本理论、基本方法，并通过不断地应用加以强化，这些基本理论和基本方法应该是相互联系的，形

成一个良好的知识结构,“结构的理解能使学生从中提高他们直觉地处理问题的效果”.（布鲁纳）

（二）教学中要强调数学术语和概念的精确化,注意辨析近似概念的异同,能够用自己的语言重新阐明各种观念,对于不正确的概念，命题善于构筑反例，予以辨驳，培养对问题批判的、怀疑的精神.

（三）教学应采取主动的接受学习的方式,辅以有指导的发现学习,设置最近发展区，形成一种有利于再创造的问题情景，在解题策略的探索过程中要实行“延迟判断”，避免由教师直接作出决策评价，而应该启发学生作出各“检索联想”，尽量由学生说出过程,通过“慢镜头分解”提高学生的思维自控力。

（四）引导学生从整体把握问题,鼓励学生大胆猜想，大步骤思维,不懈地要求学生归纳与演绎交互为用，数形结合，形象思维与抽象思维协同．改变只看演绎过程的严密性而忽视直觉猜想的价值；只看运算结果的正确性而不问思维过程简捷性的评分方法.

（五）考虑解题策略的适当分类,选取典型的可以被学生接受的例题,进行集中的分类解题策略训练。

（六）不断揭示数学的简单性、对称性和统一性，提高学生的审美能力，严格要求学生,培养学生的坚毅性、勇敢性和坚持不懈地追求真理修正错误的态度，教师以身示范,唤起学生“判天地之美，析万物之理”的热爱科学的献身精神．布鲁纳说：“不愿或不能表现他自己的直觉能力的教师,要他在学生中鼓励直觉,就不大可能有效。”

第六章　数学解题的错误分析

对于数学习题，难道我们可以因为有了正确的思路和解法而忽略对错误进行分析吗？当然不可以．行为主义心理学家认为人是在不断地尝试错误中进行学习的，这种学习理论虽然由于认知心理学家提出"顿悟"说而显得不足，但是仍不失为解释大量学习现象的依据．钱学森说，正确的结果，是从大量错误中得出来的；没有大量错误作台阶，也就登不上最后正确结果的高座．美国心理学家布卢姆(B. S. Bloom)主张每个孩子都能够学好，他认为提高学习质量的重要手段就是教师按照教学目标对学生进行形成性测验，由此发现学生对哪些题目不能作出正确解答，然后通过教师或是同学互助的办法帮助进行必要的补课，使他们真正掌握这部分内容．在学生解答数学习题的过程中，问题不在于是否存在着错误，而在于教师应怎样正确对待学生的错误．英国心理学家贝恩布里奇说过，差错人皆有之，作为教师不利用是不能原谅的．

对数学习题进行错误分析的重要意义：

1．它是教师检查教学方案的执行情况，及时地调整教学方案的依据．在数学教学中，教师为控制其进程不偏离教学目标，就应从数学习题的错误分析获取反馈信息，据此正确地确定重点、难点，使教学更有针对性．当代著名的数学教育家弗洛依滕泰尔在第四届国际数学教育大会上的演说中提到一个他教过的十二岁的女孩子，她学过分数，但把$\frac{16}{24}$约简成$\frac{3}{8}$，一个意想不到的错误．女孩子解释说：$16=2\times 8$, $24=3\times 8$，所以得$\frac{3}{8}$，追根究源，问题就清楚了，是短时记忆的问题，也就是计算的中间结果的存储或再

现中的错误．对于类似这样的问题，过去弗洛依滕泰尔曾错误地归咎于不专心．于是他给女孩布置作业：用心算把100以下的整数分解质因数 来发展她的短时记忆能力，两个星期以后，这女孩完成同样的任务就没有困难了．

2．它是发展学生的自我纠错能力的前导．英国剑桥大学心理学教授巴特利特说过："测定智力技能的唯一最佳标准可能是检测并摒弃谬误的速度．"自我纠错能力是与学生的思维的正确性、严密性、完整性和批判性密切相关的．学生能够从数学习题的错误中，意识到自己的思维过程中的缺陷，自觉地实行控制，根据解题的需要，灵活运用各种方法和技能进行思维操作，这是提高学生的思维能力的一个重要方面．

在数学解题中，学生表现的错误是多种多样的，为了有效地利用这些错误，从中吸取教训，以便达到纠正错误的目的，必须对各种错误进行分析与归类．但是由于产生错误的原因的复杂性和错误的表现形式的多样性，因此按不同的分类标准，可以对错误作出不同的分类．比如按个体发生解题错误的频发程度，可分为一贯性错误和偶然性错误；按群体发生解题错误的范围大小，可分为普遍性错误和个别性错误．举例来说，1981年全国高等学校招生理科数学第八题，是一个较难的立体几何问题（见本书第60页），该题满分为18分，根据浙江省的抽样统计，在600份试卷中得0分的有155人，得1～5分的又有118人，全题得分率仅为41%，是该次考试中得分率最低的题目．考生的错误主要是缺乏空间观念，有的把立体图当作平面图，有的不知道异面直线的交角，有的不知道直线与平面的交角，这类错误不仅在范围上具有普遍性，而且发生错误的原因具有同一性，这是普遍性错误的本质特征．根据这一分析得出结论：立体几何是当时浙江省中学数学教学中比较薄弱的环节，必须加强．

分类问题的顺利解决，不仅具有理论意义，而且具有重大的教学实践意义．要防止学生重犯解题中的错误，必须从对错误进行分类开始，正确诊断，才能药到病治．为了有利于教师设计和选择克服错误的教学方法，我们将从学生的认知结构方面的原因对解题错误加以分类，当然，进行这样的分类，要求完全准确是困难的，这一方面是因为发生错误的原因常常是交织的，另一方面是即使对同样一种错误表现，我们也需要对具体问题作出具体分析．如

计算 $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}$，

对于一个小学高年级学生来说，计算发生困难，其原因是没有掌握分数加法法则；而对于一个企图通过心算得出结果的大学生来说，如果发生困难，其原因则是由于短时记忆容量的不足，后者只要稍用笔算辅助，就可以得出正确结果．

由于数学解题的错误其终极表现必然反映在知识上，因此不少论者都把它们看成是知识性的，企图用知识性的错误去概括一切．其实学生认知结构包括知识结构和认识结构两个方面，当学生的认知结构不能同化他所接触的题目时，就发生解题错误，因此数学解题错误的原因，除了学生的知识结构不完善之外，还应该考虑到学生的认识结构．下面我们分知识性错误、逻辑性错误、策略性错误、心理性错误等方面分别加以探讨．

第一节　知识性错误

知识性错误是指学生对某些有关知识理解不清，运用不当，因此未能正确陈述解题过程和结论而导致错误．其主要表现有：

一、不能正确理解题意

理解题意是正确解题的前提，正确理解题意就是将题目所提

供的信息全部消化接收并进行分解和编码．如分清题目的“已知”与“未知”，“条件”与“结论”，透彻地理解其中每个概念的含义，揭示它们之间的联系．消除似是而非、顾此失彼的思想状态．有时仅仅由于题意理解中的一字之差，在解题过程中就会面目全非．如：

1．p 是什么数值时，方程 $x^2+px-3=0$ 与 $x^2+4x-p+1=0$ 有且仅有一个公共根，并求出公共根．

2．p 是什么数值时，方程 $x^2+px-3=0$ 与 $x^2+4x-p+1=0$ 有公共根，并求出公共根．

这两个题目的区别仅在于前者两个方程“有且仅有一个公共根”，后者“有公共根”即至少有一个公共根，因此它们的解答是，前者：当 $p=-2$ 时公共根为 -1；后者：当 $p=-2$ 时公共根为 -1，当 $p=4$ 时公共根为 $-2\pm\sqrt{7}$．如果不弄清两者的不同，就会导致错误．又如：

【例 1】 5 个人从左到右站成一排，其中甲站在首位或乙站在末位的排法有多少种？

错解：甲站在首位乙不在末位的排法有 $C_3^1\cdot P_3^3$ 种；乙站在末位甲不在首位的排法有 $C_3^1\cdot P_3^3$ 种．故本题的解答为

$$C_3^1\cdot P_3^3+C_3^1P_3^3=36(\text{种}).$$

上述解法的错误就在于将可兼的“或”理解成为不可兼的“或”．实际上应分为下列三种情况考虑：(1)甲站在首位乙不在末位；(2)乙站在末位甲不在首位；(3)甲站在首位而且乙站在末位．

二、概念、性质混淆不清

常见的表现有：(1)邻近概念辨别不清；(2)基本数学概念理解不透彻；(3)定义、判定定理和性质定理区别不开．

【例 2】 化简 $\sqrt{\lg^2 3-2\lg 3+1}$．

错解：$\sqrt{\lg^2 3-2\lg 3+1}=\sqrt{(\lg 3-1)^2}=\lg 3-1$．

发生上述错误有两种可能的情形：(1)对算术根的概念不清楚；(2)虽然知道$\sqrt{(\lg 3-1)^2}$表示$(\lg 3-1)^2$的算术平方根，但由于对常用对数的性质不清楚，误认为$\lg 3-1>0$.

【例 3】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$.

错解：$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})=\infty-\infty=0$.

上述错误是将数学记号"∞"当作有限数，应用有限数的运算法则而引起的．正确解法：

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}$$

$$=0\times\frac{1}{2}=0.$$

三、忽视公式、定理成立的条件

形式地记忆公式、定理，对公式、定理的本质缺乏深刻理解，因此不考虑是否具备应有条件，生硬地加以套用．

【例 4】 求函数$y=x^4+px^2+q(p, q\in R)$的最小值.

错解：由二次函数求最小值公式可知，当$x^2=-\frac{p}{2}$时，$y_{最小}=\frac{4q-p^2}{4}$.

将二次函数求最小值的方法推广到双二次函数是不当的．实际上，当$p>0$时，不存在$x^2=-p$的情况，正确解法：

将函数变形为

$$y=\left(x^2+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}.$$

当 $p\leqslant 0$ 时，$\left|x^2+\frac{p}{2}\right|$ 的最小值是 0，得 $y_{最小}=\frac{4q-p^2}{4}$；当 $p>0$ 时，$\left|x^2+\frac{p}{2}\right|$ 的最小值是 $\frac{p}{2}$，得 $y_{最小}=q$.

【例 5】 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之和 $S_n=3^n-2^n+40$. 求数列的通项公式.

错解：所求的通项公式为

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(3^n-2^n+40)-(3^{n-1}-2^{n-1}+40)$$
$$=2\times 3^{n-1}-2^{n-1}.$$

上述解答的错误在于公式 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 成立的条件是 $n\geqslant 2$，当 $n=1$ 时未必成立. 实际上 $n=1$ 时，$a_1=S_1=3-2+40=41$，而此时 $2\times 3^{n-1}-2^{n-1}=2-1=1$.

【例 6】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

错解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1^2}{n^3}+\lim_{n\to\infty}\frac{2^2}{n^3}+\lim_{n\to\infty}\frac{3^2}{n^3}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^3}$$
$$=0+0+0+\cdots+0=0.$$

上述解法中存在两个问题：(1)将（有限个有极限的）数列极限的运算法则错误地推到无限个的情形；(2)误以为无限个以 0 为极限的量（无穷小量）之和仍为 0. 一般地说，求含有有限和形式的表达式当 $n\to\infty$ 时的极限，应先用求和公式加以变形.

第二节 逻辑性错误

逻辑性错误是指学生在解题中由于违反逻辑思维的形式和规律而产生的错误. 逻辑性错误本质上也是知识性错误，但是究其导致错误的知识盲点主要不在于数学而在于逻辑. 逻辑性错误的

常见表现有：

一、虚假论据

真实的论据是论证的首要要求，以虚假的命题作为推论的依据，违反了逻辑思维的充足理由律。

【例7】 已知$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$是无理数，求证$\sqrt{5}+\sqrt{7}$是无理数。

错解：由已知$\sqrt{5}$，$\sqrt{7}$是无理数，因为无理数之和是无理数，所以$\sqrt{5}+\sqrt{7}$是无理数。

这里的"无理数之和是无理数"是一个虚假论据，我们很容易举出反例，如$\sqrt{3}$和$-\sqrt{3}$都是无理数，但它们的和$\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0$，0不是无理数。解决本题的正确方法是用反证法。

二、偷换概念

【例8】 已知m为有理数，问k为何值时方程$x^2-2(3m+1)x+(8m^2+2m-3k)=0$的根是有理数？

错解：要使方程的根是有理数，它的判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=[2(3m+1)]^2-4(8m^2+2m-3k)\\&=4(m^2+4m+1+3k)\end{aligned}$$

必须是完全平方式，也就是必须方程的$\Delta=0$时有两个相等的实根。于是

$$\Delta'=4^2-4(1+3k)=12(1-k)=0,$$

$$\therefore\quad k=1.$$

上述解法中把"有理数的平方"说成"完全平方式"，偷换概念，违反了逻辑思维的同一律。实际上，我们只要有$\Delta=n^2$（n为有理数），从而$k=\frac{1}{12}(n^2-4m^2-16m-4)$。

三、分类不当

分类是揭示概念外延的逻辑方法。解答数学习题时经常需要

分类讨论，分类讨论要依据形式逻辑中关于概念划分的规则：(1)划分应当是相应相称的，即划分所得的子项的外延的总和应该等于母项的外延；(2)每次划分应当按照同一标准进行；(3)划分的子项必须互相排斥，即划分的子项的外延之间必须是不相容的并列关系，不能是交叉关系或从属关系；(4)划分应当按照层次逐级进行.

【例 9】 求函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{a^x-kb^x}}(a>0,\ b>0,\ a\neq1,\ b\neq1)$的定义域.

错解：当 $a>b>0,\ a\neq1,\ b\neq1$ 时，$x>\log_{\frac{a}{b}}k(k>0)$；当 $b>a>0,\ a\neq1,\ b\neq1$ 时，$x<\log_{\frac{a}{b}}k(k>0)$.

上述解答没有考虑 $a=b$ 时的情况，同时对于 $a>b,\ a<b$ 的情况下，没有进一步就 $k>0,\ k<0,\ k=0$ 进行讨论，因此犯了“分类不全”的错误.

1984 年全国高等学校招生理科数学第四题：“三个平面两两相交，有三条交线，证明这三条交线互相平行或交于一点.”有些考生采用反证法，提出原命题结论的反面：“如果这三条交线既不互相平行又不交于一点.”但都因分类不当，未能把命题结论反面的一切情况既不遗漏又不重复地列出来，然后逐一加以否定，犯了论证不完全的错误.

分类不当的一个常见表现是以偏概全、忽视特例，这和学生解题时的分类意识不强、思考问题不周密有关.如一个有关三角形的命题，本来应该从锐角三角形、钝角三角形、直角三角形三种情况来考虑，却只考虑锐角三角形这一种情况；解题时没有注意到方程 $y=kx+b$ 不能表示和 x 轴垂直的直线、等等.

四、循环论证

循环论证总是相对于一定的理论系统而言的. 在一定的理论

系统中，在证明命题A时，用了命题B的真实性作根据，而在证明命题B时又用命题A的真实性作根据，那么命题A的证明就犯了循环论证的错误．如对我国现行中学数学课本这一理论系统而言，假设有人在证明勾股定理时用余弦定理作依据，而实际上余弦定理的证明是以勾股定理为依据的，这样，勾股定理的证明就犯了循环论证的错误．上面这一对循环论证的议论还是描述性的，下面用较为精确的语言予以定义．

我们知道每个证明都是由论题、论据和论证所构成的．论题就是真实性需要确定的那个命题；论据是证明论题真实性所根据的真命题；而论证则是论题与论据之间的联系方式，具体表现为引用论据得出论题的推理形式．关于论据，必须满足下列两条要求：

1．论据必须真实；

2．论据的真实性不能依赖论题的真实性．

违反上述关于论据的规则的第2条，即论据的真实性依赖论题的真实性的逻辑错误，叫做循环论证．

在证明中，论题要由论据推出，如果论据又要由论题推出，这实际上就是论题由论题本身推出，所以一个循环论证并没有真正证明要证明的论题．

【例10】 已知四边形 $ABCD$ 中，E, F 分别是边 AD, BC 的中点，$EF=\frac{1}{2}(AB+DC)$．求证 $AB\parallel DC$．

错证：用反证法．

假设 $AB\nparallel DC$，则 $ABCD$ 不是以 AB 为底的梯形，因此两腰中点连线不等于上、下底之和的一半，即 $EF\neq\frac{1}{2}(AB+DC)$．这与已知条件 $EF=\frac{1}{2}(AB+DC)$ 相矛盾，所以 $AB\parallel DC$．

上述证明中，论据"$AB\nparallel DC\Rightarrow EF\neq\frac{1}{2}(AB+DC)$"就是论

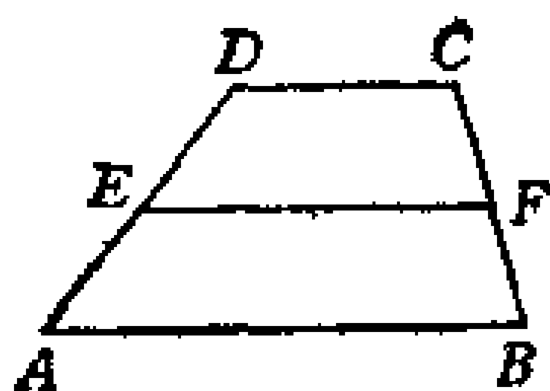


图 6-1

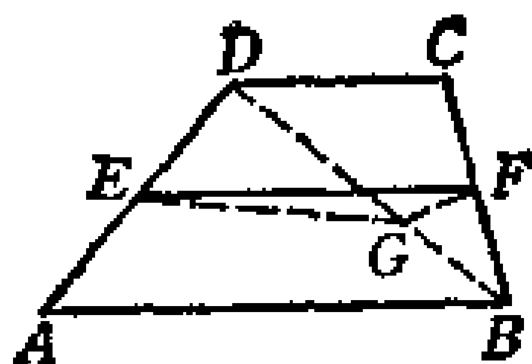


图 6-2

据"$EF=\frac{1}{2}(AB+DC)\Rightarrow AB\,/\!/\,DC$"的逆否命题，而逆否命题与原命题是等价的，它的真实性又依赖于原命题的真实性，因而是循环论证. 为了避免这一错误，可采取下列证法：如图 6-2，取对角线 DB 之中点 G，连接 EG 与 FG，则由 $EG=\frac{1}{2}AB$，$FG=\frac{1}{2}DC$，可得 $EG+FG=\frac{1}{2}(AB+DC)=EF$，所以 G 点在 EF 上，于是 $AB\,/\!/\,EF\,/\!/\,DC$.

上面我们提到，循环论证是相对于一定的理论系统而言的，如果在我国现行初中平面几何课本中，在学生学习"逆否命题与原命题等价"之前，对下列题目：

用反证法证明：在同圆中，如果两条弦不等，那么它们的弦心距也不等.（初级中学课本《几何第二册》第 96 页，人民教育出版社 1984 年 10 月第 1 版）

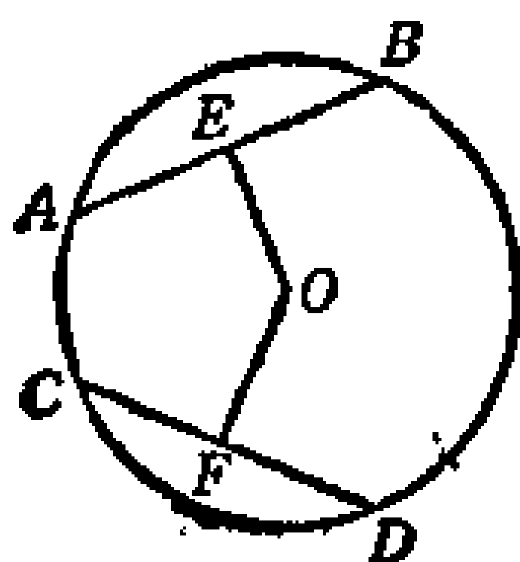


图 6-3

作出这样的证明：

如图 6-3，假设弦心距 $OE=OF$，因为在同圆中，如果两条弦的弦心距相等，那么这两条弦相等，即 $AB=CD$，但这与题设矛盾，所以 $OE\neq OF$.

上述证明，因为并未涉及"逆否命题与原命题等价"这一命题，并且作为论据的命题的真实性都是前面已经证明了的，也就是做

到了步步有据，所以这样的证明未犯循环论证的错误.

五、不等价变换

在某些求解题中，由于对作为解题依据的命题进行不等价变换，常导致解集的缩小或扩大，这是极为常见的一种逻辑错误.

（一）用充分条件代替，解集可能缩小　现在来看下例：

【例 11】　解不等式 $\log_{2x}(3x-1)>0$.

错解：只要解不等式组

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} 2x>1; \\ 3x-1>1. \end{cases}$$

由此得 $x>\frac{2}{3}$. 即原不等式的解集是$\left(\frac{2}{3},\ +\infty\right)$.

在上述解法中，不等式组(I)是原不等式成立的充分条件而非必要条件. 实际上

$$\log_{2x}(3x-1)>0 \Leftrightarrow \text{(I) 或 (II)} \begin{cases} 0<2x<1; \\ 0<3x-1<1. \end{cases}$$

也就是说，原不等式的解集是不等式组(I)以及(II)的解集的并集，因此上述解法就遗漏了(II)的解集：$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2}\right)$.

（二）用必要条件代替，解集可能扩大　现在来看下例：

【例 12】　设 $a>0$，且 a, $a+1$, $a+2$ 是一个钝角三角形的三边，求 a 的取值范围.

错解：因为 $a+2>a+1>a$. 设三角形的钝角是 α，则 α 必为 $a+2$ 的对角. 由余弦定理

$$\cos\alpha=\frac{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}{2a(a+1)}=\frac{a-3}{2a}<0,$$

得 a 的取值范围为(0, 3).

让我们检验一下，令 $a=1$，则 $a+1=2$, $a+2=3$, 此时有 $a+(a+1)=a+2$，不能构成三角形！实际上 $\cos\alpha<0$ 仅是"a, $a+1$,

$a+2$ 是一个钝角三角形的三边”的必要条件而非充分条件. 正确的解法应该是

$$\begin{pmatrix} a,\ a+1,\ a+2\ 是一个 \\ 钝角三角形的三边 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0; \\ a+(a+1)>a+2; \\ \cos\alpha<0. \end{cases}$$

由此得 a 的取值范围为$(1, 3)$.

【例 13】 已知方程 $x^2+(m-2)x+5-m=0$ 的两根都大于 2, 求实数 m 的取值范围.

错解: 设方程的两根为 α, β, 则由已知 $\alpha>2$, $\beta>2$, 由此得

$$\alpha+\beta=-(m-2)>4;$$

$$\alpha\beta=5-m>4.$$

再考虑 $\Delta=(m-2)^2-4(5-m)=m^2-16\geqslant 0.$

由上面三个式子得 $m\leqslant -4$, 即 m 的取值范围为$(-\infty, -4]$.

上述解法的错误在于, 虽然 $\begin{cases}\alpha>2;\\ \beta>2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta>4;\\ \alpha\beta>4,\end{cases}$ 但是由 $\begin{cases}\alpha+\beta>4;\\ \alpha\beta>4\end{cases}$ 却不能推出 $\begin{cases}\alpha>2;\\ \beta>2.\end{cases}$ 因此犯了将必要条件代替充要条件的错误, 其结果是扩大了解集. 如令 $m=-5$, 满足 $m\leqslant -4$, 但是此时原方程为 $x^2-7x+10=0$, 其两根为 2, 5, 并不满足“都大于 2”的要求. 实际上, 本题的正确解答是: m 的取值范围为 $(-5, -4]$.

为了弄清错误原因分析中提到的 $\begin{cases}\alpha>2;\\ \beta>2\end{cases}$ 与 $\begin{cases}\alpha+\beta>4;\\ \alpha\beta>4\end{cases}$ 的不等价性, 我们借助于图像再加以说明, 注意到

$$\begin{cases}\alpha+\beta>4;\\ \alpha\beta>4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha>0;\\ \beta>0;\\ \alpha+\beta>4;\\ \alpha\beta>4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha>0;\\ \beta>0;\\ \alpha\beta>4.\end{cases}$$

(因为 $\alpha\beta>4$ 时必有 $\alpha+\beta\geqslant 2\sqrt{\alpha\beta}>2\sqrt{4}=4$)而满足 $\begin{cases}\alpha>2;\\ \beta>2\end{cases}$

的点在图 6-4 中的①(斜线阴影部分),满足$\begin{cases}\alpha>0;\\ \beta>0;\\ \alpha\beta>4\end{cases}$ 的点在图 6-4 中的 ②(点阴影部分),两者并不一致. 我们可以得到点(α,β)在①$\Rightarrow$点(α,β)在②,但逆向推出关系是不存在的,即$\{(\alpha,\beta)|\alpha>2,\beta>2\}\subset\{(\alpha,\beta)|\alpha>0,\beta>0,\alpha\beta>4\}$,这充分地说明了解集扩大的原因.

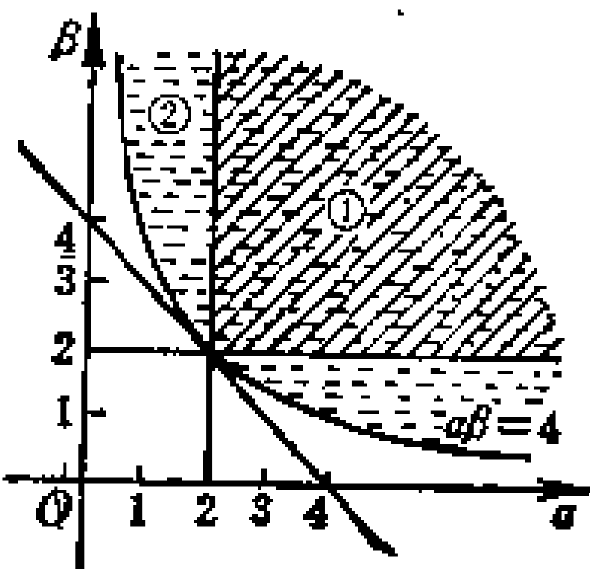


图 6-4

通过本例的分析,我们看到,用集合观点来考察由于不等价变换而导致解集的缩小或扩大的原因,是比较方便和容易理解的. 一般地,我们用 x 表示讨论问题的某种对象,$p(x)$表示对象 x 具有某性质 p, $\{x|p(x)\}$表示具有性质 p 的对象 x 的集合. 如果

$$p(x)\Rightarrow q(x),$$

而且反之由 $q(x)$不能推出 $p(x)$, 那么 $p(x)$是 $q(x)$的充分而非必要条件; $q(x)$是$p(x)$的必要而非充分条件. 从而若 $x'\in\{x|p(x)\}$, 必有 $x'\in\{x|q(x)\}$; 而且必定存在 $x''\in\{x|q(x)\}$, 而 $x''\notin\{x|q(x)\}$. 所以$\{x|p(x)\}$是$\{x|q(x)\}$的真子集. 这就说明了, 在解题过程中, 若以 $p(x)$代替 $q(x)$, 解集必定缩小; 反之, 若以 $q(x)$代替 $p(x)$, 解集必定扩大.

第三节　策略性错误

探索性习题和问题性习题的解决不能依靠固定的模式, 而需

要首先制定解题策略,因此,对于这两类习题,解题策略的正确制定,是解题顺利进行的先决条件. 主体对某个数学习题的熟悉程度越低,策略寻找的意义就越大.一个数学习题的解决,当然可能采取多种不同的策略. 如西蒙就研究过解决河内塔问题的四种不同的解题策略:目标递归策略、知觉策略、模式策略和机械记忆策略,并对这四种策略的优劣加以比较. 一个好的策略不仅可能使解题过程明快、利落,思维合理而经济,具有事半功倍的作用,而且还可能决定数学习题的最终解决.

我们这里所说策略性错误有两种稍有区别的含义:可以指一种策略产生错误的导向,因而未能使问题得到解决;也可以指一种策略明显地增加了解题过程的难度和长度, 如果加上时间限制这个因素, 问题也很可能因此而得不到解决. 下面分述策略性错误的表现.

一、不能正确识别模式

西蒙、纽威尔等人从本世纪五十年代起,以信息加工观点对人解决问题的过程进行了一系列研究, 得出人所面临的问题的大多数问题是通过模式识别来解决的.据此,施铁如就解代数方程应用题的模式识别进行了实验(1984). 让学生识别一个新的代数方程应用题属于哪一类, 然后以此为索引在记忆贮存中提取相应的方法,这就是模式辨认. 施铁如认为"辨认的正确与否决定着所提取的方法合适与否, 从而也就决定着解题结果的正确与否". [1]

【例 14】 妈妈去商店买布,所带的钱刚好可买某种最好的布 2 米,或次布 3 米,她决定两种布买同样多的米数, 问最多各能买几米?

此题属工程问题,关键是把所带的钱数看作总体1. 但一些被试者由于不能正确辨认模式,因而未能导致问题的解决.下面是两

[1] 施铁如《解代数应用题的认知模式》,《心理学报》1985 年第 3 期.

个被试者的口述记录:

a:"这买一半,那买一半…钱数不同,各买一半不行. 2 比 3,两个比无总数不行. 唉,不知道总钱数,知道总钱数就可以知道."

主试问:"此题像什么类型?"

a 答:"按比例分配."

主试问:"如何分配?"

a 答:"分不了,没总数."

这里 a 错认模式,束手无策.

d:"米数相同,设所带的钱数为 x. 不是,设最好布为 x 元,$2x$. 不是,相同的长度数,所带的钱为 x, 2 米就是求每米多少钱,$\frac{x}{2}$. 又不行. 相同的米数,能买几米?相同米数,每米为 x, $2x$ 就是所带的钱数. …设最好的布每米价钱为 x. $2x$ 是所带的钱数. $2x=\cdots$ 设一共带 x 元,$\frac{x}{2}$ 就是好布每米价钱. (划掉)不行."

d 只是在作反复的尝试、搜寻、修正,而没有从识别类型来考虑. 即使继续做下去或许有可能做出解答,但毕竟非常麻烦.

【例 15】 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为实数,如果它们中任意两数之和非负,那么对于满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=1$$

的任意非负实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有不等式

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n \geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$$

成立. 试证之.

本题是 1986 年在南开大学举办的首届全国中学生数学冬令营试题,具有多种解法. 对于这样一个和自然数 n 有关的命题,在许多情况下可以应用"以退求进"的解题策略,即先看看 $n=2$, $n=3$的时候,命题是怎样证明的,然后推向一般,如 $n=2$ 时,欲证命题

$a_1x_1+a_2x_2\geqslant a_1x_1^2+a_2x_2^2$ 可变形为 $a_1x_1(1-x_1)+a_2x_2(1-x_2)\geqslant 0$，联系已知条件 $x_1+x_2=1$，上式可变为 $(a_1+a_2)x_1x_2\geqslant 0$，此式显然成立．倒推回去，就可得到要证的不等式．根据这一 $n=2$ 时的特殊情况下的证题思路，可知证明本题的一般结论，要用到

$$1-x_i=\sum_{j\neq i}x_j.$$

实际上，运用这种"以退求进"策略的学生，大多数都解出了这个题目．但是参加冬令营的大多数学生，却从"数学归纳法可以证明关于自然数 n 的命题"这样一种考虑出发，企图用数学归纳法来证明本题，结果只有极个别人得出正确结果①．这说明大多数学生缺乏识别模式的灵活性，他们所采取的解题策略是不正确的．

二、缺乏整体观念

探讨解题策略必须有明确的目的，也就是如何实现题目的整体要求．在一些情况下整体要求的实现未必需要有把它"尽可能地分成细小的部分"的过程．恰恰相反，如果你从各个细小的部分逐一考虑，反而会陷入繁复计算和恼人的迷津之中．

【例 16】 有甲、乙、丙三种货物，若购甲 3 件，乙 7 件，丙 1 件，共需 3.15 元；若购甲 4 件，乙 10 件，丙 1 件，共需 4.20 元．现在购甲、乙、丙各一件共需多少元？

本题是 1985 年全国各省市自治区初中数学联赛试题．根据浙江省一个地区参加竞赛的学生情况来看，未能解出的学生中，90% 以上是因为设购甲、乙、丙一件各需 x 元，y 元，z 元，得

$$\begin{cases}3x+7y+z=3.15;\\4x+10y+z=4.20.\end{cases}$$

然后企图单独求出 x，y，z，发现两个方程中有三个未知数，感到条件不足，而题目中又不可能再列出第三个方程，只好放弃．明显

① 用数学归纳法证明的方法见常庚哲《首届全国中学生数学冬令营竞赛试题讲评》，《数学通讯》1986 年第 5 期．

地看到这些学生未避开x, y, z这些非必求的成份，不能将$x+y+z$看成一个整体，化上述方程组为

$$\begin{cases}2(x+3y)+(x+y+z)=3.15;\\3(x+3y)+(x+y+z)=4.20,\end{cases}$$

直接求出$x+y+z=1.05$(元).

三、不善于从反向思考

一些数学习题，从正向思考不易甚至无法解决，反向思考便成为合理的解题策略，在这种情况下，如果主体不善于从正向转为反向思考，即分析过程由顺向转为逆向，结果处理由直接肯定转为排除反面，证题方法由直接证法转为反证法，这样，就必然产生策略性的失误.

【例 17】 若a, b, c都是奇数，证明方程

$$ax^2+bx+c=0$$

不可能存在有理根.

下面是学生S解此题的思考过程的记录：

方程的两根是$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，如果是有理数的话，$\sqrt{b^2-4ac}$就应该是有理数，…$b^2-4ac$就得开出来…，喔！$b^2-4ac$是有理数的平方. …已知$a$, b, c都是奇数，就设$a=2m+1$, $b=2n+1$, $c=2p+1$，于是$b^2-4ac=(2n+1)^2-4(2m+1)(2p+1)=4n^2+4n+1-(16mp+8m+8p+4)=4n^2+4n-16mp-8m-8p-3$. 为什么它是有理数平方呢…(束手无策)

实际上本题的正确解题策略是用反证法，即设方程有有理根$\dfrac{q}{p}$，这里的$\dfrac{q}{p}$是既约分数，因此p, q不可能都是偶数，容易证明：在a, b, c都是奇数的条件下，无论p, q都是奇数，或是其中一个是奇数，另一个是偶数，$a\left(\dfrac{q}{p}\right)^2+b\left(\dfrac{q}{p}\right)+c$均不于等0.

四、不能恰当地转化问题

当所论的问题难于处置，应将问题转化为新的形式，以期达到熟悉化、简单化的目的。

【例 18】 已知 a, b 是实数，求方程

$$|x|x+ax-b=0$$

的实根的个数.

下面是录自杂志上的错误解法：

分别考虑 $x\geqslant0$ 与 $x<0$ 的情形去掉绝对值符号.

当 $x\geqslant0$ 时，得 $x^2+ax-b=0$，于是

$a^2+4b>0$ 时，有两个实根；

$a^2+4b=0$ 时，有一个实根；

$a^2+4b<0$ 时，无实根.

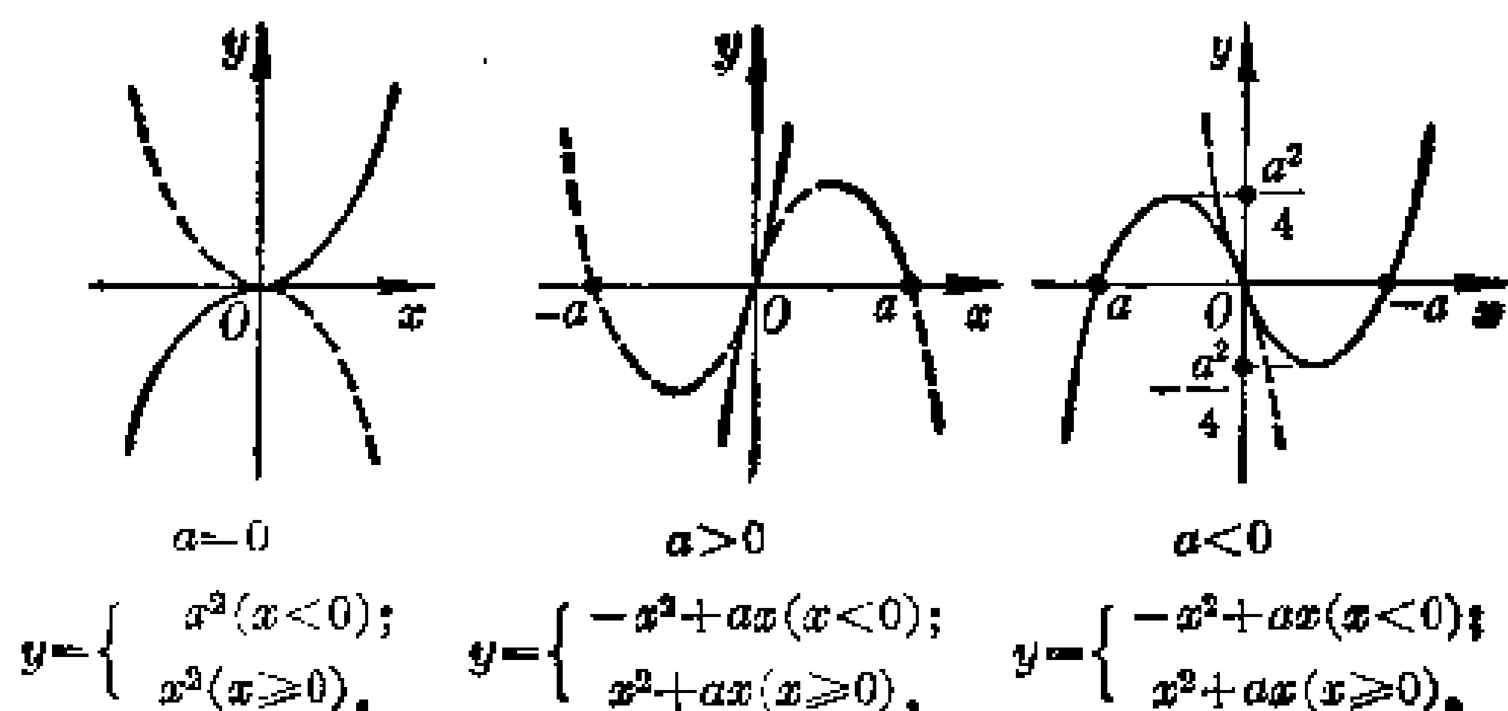
当 $x<0$ 时，得 $x^2-ax+b=0$，于是

$a^2-4b>0$ 时，有两个实根；

$a^2-4b=0$ 时，有一个实根；

$a^2-4b<0$ 时，无实根.

上述解法中虽然也对问题进行了“转化”，即将一个含有绝对值符号的方程转化为不含绝对值符号的方程，但这样做反而脱离了题意，未能通过参量 a, b 来讨论方程的实根的个数，而是不正确地就 x, a, b 之间的关系分别来讨论，实际上方程 $x^2+ax-b=0$



$a=0$ $\quad$ $y=\begin{cases}x^2(x<0);\\x^2(x\geqslant0).\end{cases}$

$a>0$ $\quad$ $y=\begin{cases}-x^2+ax(x<0);\\x^2+ax(x\geqslant0).\end{cases}$

$a<0$ $\quad$ $y=\begin{cases}-x^2+ax(x<0);\\x^2+ax(x\geqslant0).\end{cases}$

图 6-5

$(a>0)$当 $a^2+4b>0$ 时未必有两个实根. 所以这一解法逻辑混乱，其谬误性显而易见. 本题的正确解法是首先将问题转化为"求函数 $y=|x|x+ax$的图像与函数 $y=b$ 的图像的公共点的个数". 注意到 $y=|x|x+ax$ 为奇函数，其图像关于坐标原点中心对称，分 $a=0$, $a>0$, $a<0$ 三种情况. 观察 $y=|x|x+ax$ 的图像(图 6-5)，就可得本题的结论，如下表所示:

条件		实根个数
$a\geqslant 0$		1
$a<0$	$\lvert b\rvert>\frac{a^2}{4}$	1
	$\lvert b\rvert=\frac{a^2}{4}$	2
	$\lvert b\rvert<\frac{a^2}{4}$	3

第四节 心理性错误

不论数学习题的复杂性如何，学生在解答的过程中一般都经过问题的识别、记忆、理解、激活背景观念、选择调整解题方法等步骤. 这说明主体能否顺利地解决所接触的问题，除了依赖原有的知识技能之外，还和本身的心理能力和智力品质分不开. 有的数学习题，主体虽然具备解决问题的必要的知识技能，但是由于存在某种心理障碍，仍然可能产生错误，甚至一筹莫展，因此分析并确定学生解题错误中的心理方面的原因，是提高解题能力的客观需要. 数学习题中的心理性错误可分为两个方面.

一、由于心理能力不足而导致错误

学生在解答习题过程中需要具备多种心理能力，如识别能力、

记忆能力、信息加工能力、想象能力等. 卢仲衡曾指出图形交错对于感知识别能力较低的学生会产生消极影响(1961), 例如初二学生在学完全等三角形定理之后, 他测验了这样的一道题: "在$\triangle ABC$中, 已知$AB=AC$, $AE=AF$, BF与CE相交于D. 求证$BD=CD$." (图6-6) 这一道题做对的占45%, 有错误的占55%, 在错误者中49%直接或间接与图形交错有关, 如想证$\triangle ECB\cong\triangle FBC$, $\triangle EDB\cong\triangle FDC$, 但由于图形交错而找错全等三角形的边角关系或已证明全等三角形而找错对应边角者有29%; 证明了$\triangle ABF\cong\triangle ACE$, 由于图形交错而错认了对应边, 得到$BD=CD$或$BE=CF$, 或者把$\triangle BDC$的两条边看作$BD=CD$等者有20%. 因此卢仲衡指出: "两个图形本身的交错直接或间接地影响到两图的相互关系(边角的相等或不等)的寻求和辨认, 从而非常容易产生错觉. 由于这个交错的因素在感知上产生困难而造成错误思维的结果是很严重的."[1]

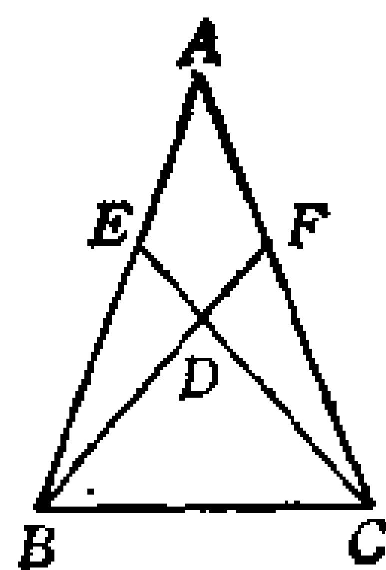


图 6-6

现代心理学对于人的记忆能力曾做过不少出色的定量研究, 作为思维的"工作间"的短时记忆, 美国心理学家米勒指出成人的短时记忆容量是七个组块(Chunk) (1956), 而且短时记忆能力是因人因年龄而异的. 皮亚杰把三岁至十六岁的学生, 按他的阶段划分法, 以$e+1$至$e+7$来表示他们的记忆容量, 这里的e代表理解命题的能力, 而数字则代表记忆数据的单位. 这些研究都是基于发觉学生在处理较多数据的心算时, 显得非常困难. 本章开头时我们已经介绍了两个这方面的例子. 当然在进行笔算, 产生某种"顾此失彼"的现象, 也往往和短时记忆能力较弱有关. 如

[1] 卢仲衡《初二学生学习数学所产生的一些错误分析》, 《数学通报》1961年第7期.

【例 19】 空间有三条直线，通过其中每两条作一个平面(如果可以作平面的话)，一共可以作几个平面？

此题根据一高中班学生的实验，无一学生能够口答给出完整答案，用笔答解题也只有36%作对，作错的有64%，其中竟有58%是由于分类层次不清而导致记忆困难，造成疏漏而产生的.

二、由于缺乏正确的心理势态而导致错误

在解题过程中，学生的知觉是有选择性的，知觉的选择性的客观因素取决于题目的特点，主观因素则取决于以往的知识经验和心理势态. 因心理势态不正确而导致错误的常见表现有

(一) **顺序心理造成的错误** 信息的储存需要进行编码，编码就是要求信息顺序化. 学生在学习换底公式的推论 $\log_{a^n} b^m = \frac{m}{n}\log_a b(a>0,\ a\neq 1,\ b>0)$时，虽然这个推论结构复杂，记忆的正确率都是比较高的. 但在学习分数指数时，不少学生却产生 $x^{\frac{3}{5}} = \sqrt[3]{x^5}$ 的错误. 这些都是因为人们头脑中不但存在和新知识密切相关的旧知识，而且存在着一些固有顺序，形成了一系列的顺序心理. 前者错误少，是因为在公式中原来m的位置在上，n的位置在下，其结果还是这样，这是非常和谐的；而后者对分数指数却要求上变下，下变上，这种逆序性的变化就遭原有顺序心理的抗拒. (赵大文, 1985)

【例 20】 某仓库存有电线杆 60 根，要把它们埋在线路上，第1根离仓库 300 米，以后每隔 100 米埋 1 根，现在仓库有一辆汽车每次可装运电线杆 7 根，用这辆汽车将全部电线杆运送到目的地，然后返回仓库，问最少要行驶多少公里路程？

错解：为了使行驶的路程最少，因此汽车必须满载，8 趟满载后，第 9 趟运剩下的 4 根. 前 8 趟往返路程构成以 2(公里) 为首项，公差为1.4 (公里) 的等差数列，由此得

$$\text{所求路程}=\frac{2+(2+1.4\times7)}{2}\times8+(2+1.4\times7+0.8)$$
$$=67.8(\text{公里}).$$

上述解法是不对的，其原因是受“就近满载”这样一种错误的顺序心理所支配．正确的解法应该把不满载的车放到最近，得

$$\text{所求路程}=\frac{2.8+(2.8+1.4\times7)}{2}\times8+1.4$$
$$=62.6(\text{公里}).$$

（二）停留性错误　概念扩展了，但学生的思维产生惰性，停留在原来的地方，这种由思维惰性产生的错误叫作停留性错误．如偶数，小学里指的是正偶数，到中学里就扩展到可表为 $2n(n\in Z)$ 的数；又如“幂”这个名称，开始指“相同因数的乘积”（正整数指数幂），后来，把 $\frac{1}{a^n}$ $(n\in N)$ 也算作幂，记作 $a^{-n}(a\neq0)$，把 $\sqrt[n]{a^m}$ $(m, n\in N)$ 也算作幂，记作 $a^{\frac{m}{n}}(a>0)$，甚至 $a^0(a\neq0)$ 也算作幂．再如数的概念从实数扩大到复数后，复数 $z=a+bi$ 所对应的向量的长度叫做复数 z 的模，记作 $|z|$，这同实数的绝对值的记号完全相同，但含义不完全一样，前者包括了后者在内的．（陈永明，1981）

【例 21】　已知 $|z|-z=1-3i$，求 z.

错解：由已知

$$|z|=z+1-3i, \qquad ①$$

从而

$$z^2=(z+1-3i)^2 \qquad ②$$

由此得

$$z=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i.$$

上述解法的问题在于由 ① 到 ② 这一步，误把 $|z|^2$ 和 z^2 等同起来，认识还停留在实数绝对值的意义上．

停留性错误是思维定势的消极性的表现，为了防止和克服这

种错误．当某种概念的外延扩大时，应及时向学生指出其内涵的缩小．如数的概念由实数扩大到复数之后，应指出：(1)两个实数可以比较大小，两个复数不能比较大小；(2)若干个数的平方和等于零，则每个数必为零，这对实数来说成立，对复数不成立；(3)实系数一元二次方程可通过判别式确定是否有实根，复系数一元二次方程则不能；(4)若 a, b 是实数，则 $|a|=|b|\Rightarrow a^2=b^2$, $a=\pm b$. 若 z_1, z_2 为复数，则由 $|z_1|=|z_2|$ 不能推出 $z_1^2=z_2^2$, 也不能推出 $z_1=\pm z_2$, 等等.

（三）忽视隐含条件　观察、分析能力较差的学生，在解题过程中产生局部满足感的驱使，常常忽视隐含条件而导致错误.

【例 22】　求函数 $y=\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{2x-x^2}$ 的值域.

错解：

$$\because\quad \sqrt{2x-x^2}\geqslant 0,$$

$$\therefore\quad 0<\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{2x-x^2}\leqslant\frac{\pi}{2},$$

即所求函数的值域为 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

上述解法只考虑到 $\sqrt{2x-x^2}$ 是算术根，因而是非负的，忽视了函数 $f(x)=2x-x^2$ 的值域对值域的影响．事实上

$$f(x)=-(x-1)^2+1,$$

从而知 $f(x)$ 的值域为 $[0,\ 1]$, 因此

$$\frac{\pi}{4}\leqslant\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{2x-x^2}\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

故所求函数的值域为 $\left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

【例 23】　动点 $P(x,\ y)$ 满足 $\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}+\arcsin y$, 求 P 点的轨迹.

错解：由已知 $\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}+\arcsin y$　　①

此式两边取正弦得 $x=\cos(\arcsin y)$

于是
$$x=\sqrt{1-y^2}\geqslant 0,$$
$$x^2+y^2=1.$$

故所求轨迹为圆 $x^2+y^2=1$ 的右半部(包括半圆圆弧的两个端点).

这一解法忽视了反三角函数值域这一隐含条件，因此导致轨迹不纯粹的失误. 实际上, 考虑①式:
$$\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right],$$
$$\frac{\pi}{2}+\arcsin y\in[0,\ \pi].$$

取上述两个值域的公共部分$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, 也就是说必须有 $x\in[0,\ 1]$, $y\in[-1,\ 0]$. 故所求轨迹为圆 $x^2+y^2=1$ 在第四象限的部分(包括圆弧的两个端点).

第五节　潜 在 假 设

马欣在文[1]中讨论了"潜在假设"对学生数学思维的影响，指出了"潜在假设"作为一种心理性错误的表现, 它"不是深思熟虑或不加考察的结果，而是对某些事物尚未建立清晰概念时自动形成的. 置身于新环境的人, 当他们对新事物的属性尚未认识清楚时, 过去的经验很可能促成一种'潜在假设', 而影响他的正确思维. 这种情况在数学教学中尤为多见". 还引用美国数学家豪斯德脱的话给"潜在假设"作如下定义: "潜在假设"就是不曾讨论什么事情时, 你总是认为正确的那个就是"最简单的"或"最自然的"或"最有可能的"那个模型.

在不适当的"潜在假设"基础上解题, 必然导致错误.

[1] 马欣《"潜在假设"及其对学生数学思维的影响》, 《数学通报》1986 年第 4 期.

【例 24】 已知 $\triangle ABC$ 的 BC 边上的高 AD, D 为垂足, $BD=8$, $CD=2$. 问 AD 多长时 $\triangle ABC$ 分别为锐角三角形?直角三角形?钝角三角形?

错解:如图 6-7, 以 BC 为直径在 $\triangle ABC$ 的同侧作半圆. 过 D 点作 $A'D\perp BC$, $A'D$ 交半圆于 A', 则 $A'D=\sqrt{BD\cdot DC}=\sqrt{8\times 2}=4$. 因为 $\triangle A'BC$ 是直角三角形, 所以

当 $AD>4$ 时, $\triangle ABC$ 为锐角三角形;

当 $AD=4$ 时, $\triangle ABC$ 为直角三角形;

当 $AD<4$ 时, $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

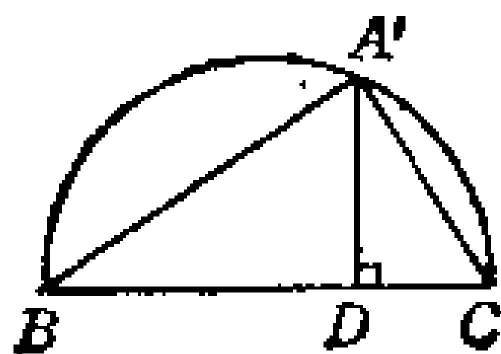


图 6-7

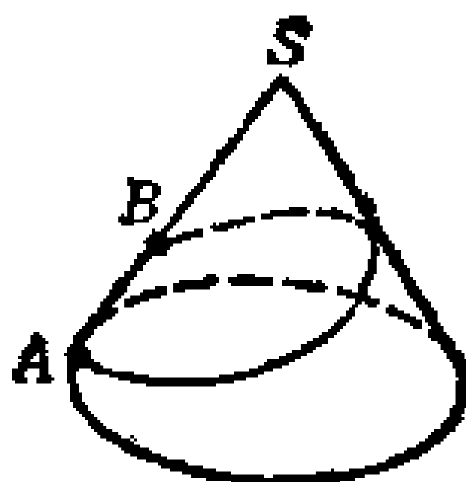


图 6-8

【例 25】 有一个圆锥如图 6-8, 它的底面半径为 r, 母线为 l, 在母线 SA 上有一点 B, $AB=a$. 求由 A 绕圆锥一周到 B 的最短距离. (六年制重点中学高中课本《立体几何》第 128 页, 人民教育出版社 1981 年 12 月第 1 版)

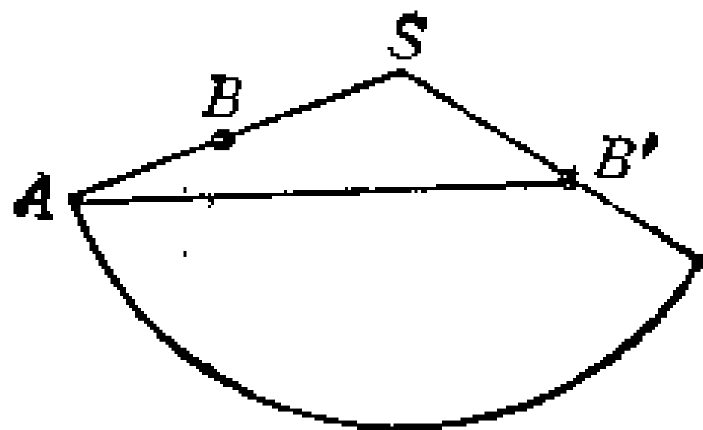


图 6-9

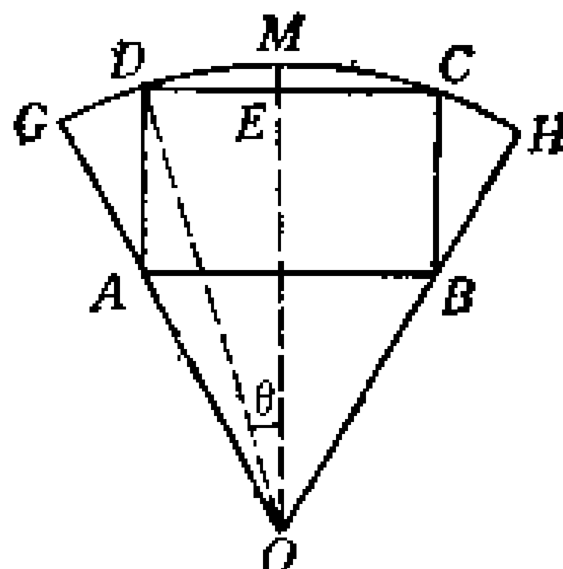


图 6-10

错解：将圆锥的侧面沿母线 SA 剪开，展平如图 6-9，B' 是 B 的对应点，连接 AB'，则 AB' 即为所求距离．由余弦定理可得

$$AB'=\sqrt{l^2+(l-a)^2-2l(l-a)\cos\frac{2\pi r}{l}}. \qquad ①$$

【例 26】 在半径为 R 的 $60°$ 扇形内，求内接矩形面积 S 的最大值．

错解：如图 6-10，M 为 $60°$扇形的弧 GH 的中点，则 OM 是扇形的对称轴，也是扇形的内接矩形的对称轴，OM 交 DC 于 E．设$\angle DOM=\theta$，则

$$\angle DOA=30°-\theta,\ \angle DAO=150°,$$

$$DC=2DE=2R\sin\theta,$$

$$AD=\frac{OD\sin\ DOA}{\sin DAO}=\frac{R\sin\ (30°-\theta)}{\sin 150°}=2R\sin(30°-\theta),$$

$$\therefore\quad S=DC\cdot AD=2R\sin\theta\cdot 2R\sin(30°-\theta)$$

$$=2R^2[\cos(30°-2\theta)-\cos 30°].$$

当 $\theta=15°$时，　　$S_{最大}=(2-\sqrt{3})R^2$.

上述三题的共同错误就是引进了不适当的“潜在假设”，在这样的“潜在假设”的基础上解题，犹如在沙滩上盖高楼，高楼当然要倾斜，甚至会坍塌的．

例 24 解法中的“潜在假设”是：D 点在 BC 上．如果 D 点在 BC 的延长线呢？那么不论 AD 的长是多少，$\triangle ABC$ 都是钝角三角形．

例 25 解法中的“潜在假设”是：圆锥侧面展开图的圆心角

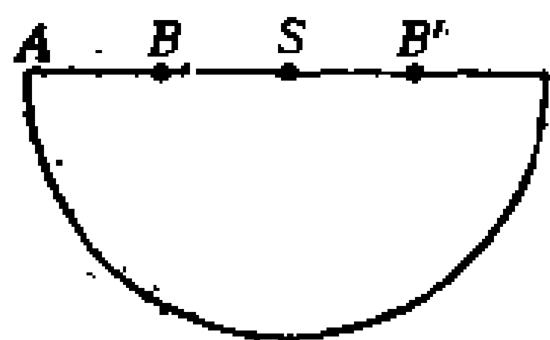


图 6-11

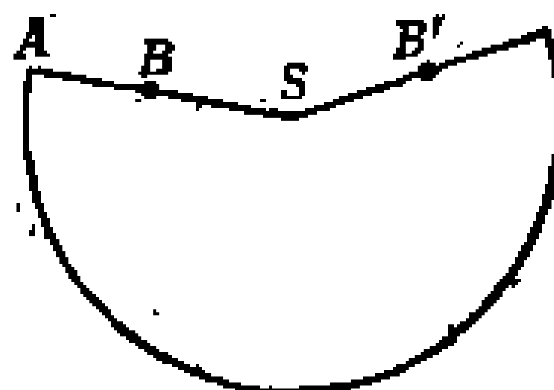


图 6-12

$\frac{2\pi r}{l}<\pi$, 即$2r<l$. 而当 $2r=l$(图 6–11)或 $2r>l$(图 6–12)时, ①式就不能表示 A 到 B' 的最短距离，从图中看这个最短距离应为 $AS+SB'=2l-a$, 但实际上此时线段 AB' 或折线段 ASB' 在圆锥侧面上并不符合“由 A 绕圆锥一周到 B”这个意思，因此在这两种情况下题目无解.

例 26 解法中的“潜在假设”是: 内接矩形的最大面积一定在矩形与 OM 呈轴对称时取得. 实际上，当矩形的两个顶点在扇形的一条半径上，另两个顶点分别在圆弧及另一条半径上时，其面积才能取得最大值. 如图 6–13, 设

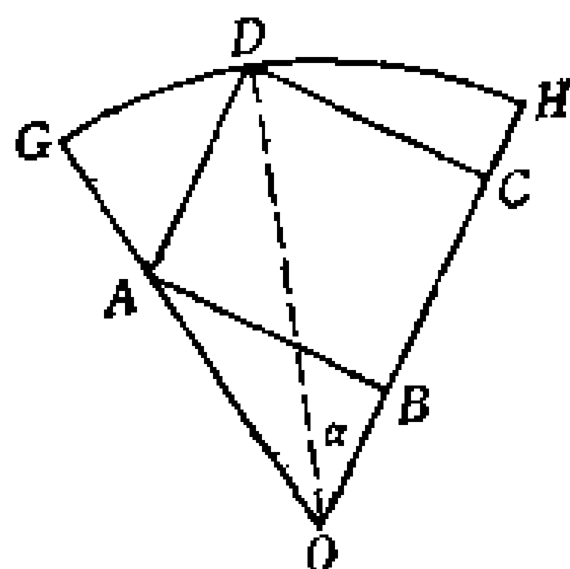


图 6-13

$$\angle DOC=\alpha,$$

则
$$\angle AOD=60^\circ-\alpha,$$
$$\angle DAO=120^\circ,$$

$$DC=R\sin\alpha,$$

$$AD=\frac{OD\sin AOD}{\sin DAO}=\frac{R\sin(60^\circ-\alpha)}{\sin 120^\circ}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{3}R\sin(60^\circ-\alpha),$$

$$\therefore\quad S=DC\cdot AD=R\sin\alpha\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}R\sin(60^\circ-\alpha)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}R^2[\cos(60^\circ-2\alpha)-\cos 60^\circ].$$

当 $\alpha=30^\circ$ 时, $S_{最大}=\frac{\sqrt{3}}{6}R^2$.

因为

$$\frac{\sqrt{3}}{6}-\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{7\sqrt{3}-12}{6}=\frac{\sqrt{147}-\sqrt{144}}{6}>0,$$

所以$(2-\sqrt{3})R^2$不是S的最大值.

"潜在假设"从心理上分析，是在缺乏对事物作深入、细致、全面的考察的情况下，基于一种不正确的心理势态的诱导，而作出直觉性的判断，这种直觉性的判断存在于主体的潜意识中，一旦被激活就用以作为解题的依据. 数学，作为有别于其他经验科学的完全依照严格的演绎体系建立起来的科学，在教学过程中，我们要求学生叙述问题时要"步步有据"，认为只有这样才能体现数学的教育价值. 因此，我们有理由要求在教学过程中，尽可能减少或避免会在学生的思想中诱发或加强"潜在假设"的那种语言. 这种追求数学的"严谨性"，通过数学的严谨性去培养学生逻辑地去思考问题、把握世界的思想，曾被许多数学法专家加以肯定. 但是，问题并不是如此简单，比如，在例 25 中，我们可以向学生指出："圆锥侧面展开图的圆心角小于π"是一个"潜在假设"，应予以摒弃，但是"将圆锥的侧面展平"不也是一个"潜在假设"吗？如果学生提出问题："旋转体的表面是可以展平的吗？"你将怎样去回答他们？ 这确实不是一个虚构的问题，江苏省特级教师马明在讲"球的表面积"一课中，就有好些学生提出："为什么球不能展开成平面图形？ 如果能展的话，计算多方便啊！"几天之后，竟有一名学生告诉马明，他已经找到了一种将球面展开成平面的办法：作底面半径为R，高为$2\pi R$的圆柱，用轴截面剖开取其一半，接着将半径为R的球在此半圆柱内滚动一周，则球面便展在半圆柱的侧面上(图 6-14). 然后将此半圆柱的侧面展开成矩形. [1]一个曲面在什么条件下是"可展曲



图 6-14

[1] 引自郭思乐、刘远图《中学数学教学》，光明日报出版社 1987 年 10 月第 1 版.

面”，这要涉及到微分几何学的知识，中学生当然无法接受．课本直接将圆锥面和圆柱面看成“可展曲面”通过它们的可展性来求圆锥和圆柱的侧面积，这可以认为是“潜在假设”在积极意义上的运用．当然这种做法在教学法理论上不是没有争议的，如苏联著名数学家勃格莱洛夫著的中学生读物《基础几何学》(中译本第 295 页，黑龙江科学技术出版社 1981 年 5 月第 1 版)中，就回避了曲面的可展性，而通过极限理论来解决圆锥和圆柱的侧面积问题．

再来分析一下例 26，当我们摒弃不适当的“潜在假设”而求得 $S_{最大}=\frac{\sqrt{3}}{6}R^2$ 时，不禁要产生怀疑：除了前面所列举的两种情形的内接矩形之外，是否还存在着其他的情形？比如说矩形的四个顶点，其中两个在扇形的弧上但并不呈轴对称分布呢？(图 6-15)人们会说：在这种情形下 $ABCD$ 就不成其为矩形了．但是对于这样一个判断是否需要证明？① 如果不加证明就承认的话，这不又是一个“潜在假设”吗？从这个例子我们看到，”潜在假设”的运用存在着一个“适度”的问题．经验表明，中学数学教师对这个问题的适度处理，其意见往往是分歧的．”

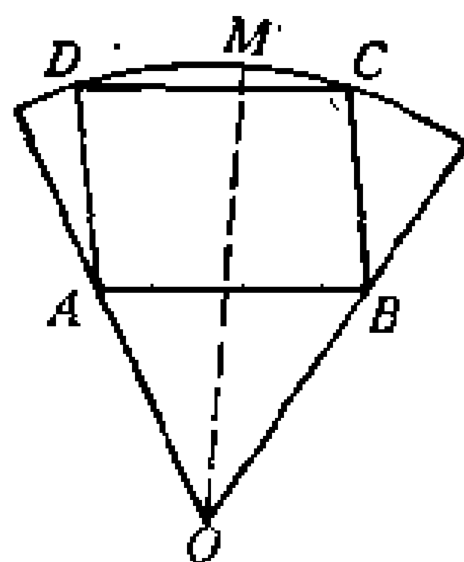
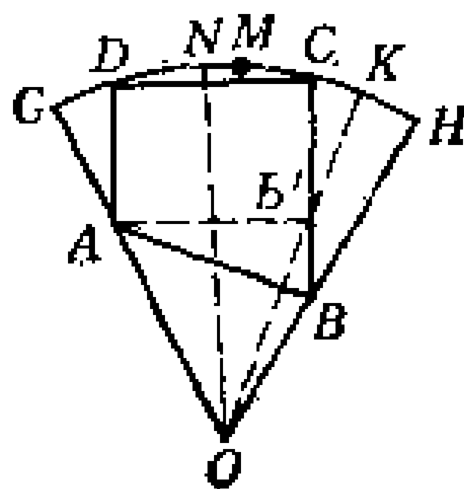


图 6-15

“潜在假设”作为一种假设，它实际上是一种判断，或者说是命题，这种命题不是显露地记载在课本里，而是隐藏在主体的潜意识之中．并且一旦激活而得到运用，主体对其真实性是深信不疑的．

---

① 证明方法如下：用反证法．假设 $ABCD$ 是矩形，取 $\overset{\frown}{DC}$ 的中点 N，连结 ON，点 K 与点 G 关于 ON 轴对称，OK 交 CB 于 B'，并且有 B' 异于 B．因为 CB' 与 DA 关于 ON 轴对称，所以 $AB'CD$ 是矩形，于是有 $AB'\perp CB$，但 $AB\perp CB$，这是矛盾的，所以 $ABCD$ 不是矩形．



在数学发展的起源阶段，人们以一种朴素的非理性的眼光，通过丈量土地和测量容积，计算时间和制造器皿，建立了几何、代数、算术和三角学.这一时期，数学家就凭借他们的经验和直觉，以某种古典数学哲学为指导，在自己的头脑中形成若干"潜在假设"，并以这些"潜在假设"为出发点来思考和研究数学的"万物皆数"，这是毕达哥拉斯的"潜在假设"，"若一直线与两直线相交，且若同侧所交两内角之和小于两直角，则两直线无限延长后必相交于该侧的一点"，在欧几里得作为第五公设记载于«原本»之前，在当时的几何学家的头脑中也是一个"潜在假设".直到公元前三世纪，欧几里得才认识到这种建立在各自的"潜在假设"之上、缺乏严谨的推理过程的数学是不成熟的，从而首先在几何学中有系统地把一些原来是潜在形式的命题作为公理，以显露的形式和明确的语言记载在他的著作之中．二千多年以来，人们一直把公理化作为反映数学特征的根本思想，以至于在本世纪初产生了"希尔伯特规划"那样企图将全部数学都建立在为数不多的、经过选择的公理之上的气势磅礴的伟大设想，虽然1931年哥德尔不完备性定理宣告了"希尔伯特规划"是行不通的，但是数学界对公理方法的热情却并未因此而降低，人们希望不断地减少"潜在假设"，提供明确的公理体系作为各数学分支的演绎推理的出发点.从数学教育来说，公理化思想也一直为教学法专家和课程设计者所强调，并以此作为实现"科学性原则"的主要标志，60年代席卷大半个世界的数学教育现代化运动中，布尔巴基学派的结构主义思想和布鲁纳的认知结构学说扮演了重要角色，这些主张与公理方法是有相通之处的.但是即使在数学科学中人们也已经惊奇地认识到"确定性的丧失"(M.克莱因，1980)，那么在数学教育现代化运动中对公理方法和严格性的过分追求，所带来的就必定是更多的挫折而不是成功了！

近代和现代的数学教育实践,使教学法专家一致地认识到,"不能混淆数学专著结构和数学课本结构的界限,不应当用数学专著结构去取代数学课本结构".(郭思乐、刘远图.1987)在选择课本中的公理系统时,正如塔尔斯基所说,有时"并不是由于理论上的理由(或者至少不仅是由于理论上的理由);其他的因素——实践方面的,教学方面的,甚至于美学方面的在这里起着作用".数学课本中的公理系统,既不要求满足"独立性",也不要求满足"完备性",科学的严格性和教学的可接受性,在这里按着教育任务的要求被适当地保持着微妙的平衡.几何直观式的"潜在假设"还被大量地加以承认和运用."一直线上两已知点之间,至少存在另外一个点."对此,我们并不要求学生利用结合公理和顺序公理加以证明.

通过以上的讨论,我们得出下面结论:

1. 从加强数学的严格性、实现数学的教育价值出发,在可接受的条件下,数学命题应尽量采取显露的形式,弱化学生以"潜在假设"作为论证依据的心态,避免使用可能会导致形成不正确的"潜在假设"的语言;

2. 如果学生在解答数学习题时出现不正确的"潜在假设",教师因该用逻辑的或是描述的理由,及时地予以纠正;

3. 由于某些数学真命题在整个知识链中是不可缺少的,但限于学生的知识准备不足或是本身的证明过于复杂、繁琐,这些真命题中的一部分就不可避免地以"潜在假设"的形式在教学中予以运用,如"每条线段必存在一个中点","二次函数是连续的",这两个真命题对初中学生来说就是必不可少的"潜在假设";

4. 数学严格性是相对的,"潜在假设"的排序或运用必须是适度的.

第六节　数学习题的检验

数学习题的检验，一般在下列两种不同意义下加以研究和施行：

(1) 作为确认答案正确性的一种措施；

(2) 作为解题过程的必不可少的步骤.

关于(1)，涉及的是一切数学习题，如果它的答案的正确性未得到充分证实，我们就用一些办法或审视其解题过程，或将其结果直接予以检验；关于(2)，涉及的是一部分在解题过程可能引进不合条件要求的结果的习题，如解无理方程、应用问题等，对于这类题目，我们必须通过检验将可能引进的不合条件要求的结果予以剔除．由此可见，数学习题的检验不仅仅要求我们将答案直接代入，而且联系到解题过程中保持解集的恒定性、答案成立的必要条件等问题，因此在一定意义上我们说数学习题的检验，是对问题的探讨和回顾．而这方面能力的培养正是学生的数学修养和心理素质的重要课题，苏联的安德尼耶夫说"验算是数学教学的必要组成部分"，就是这个道理．

一、作为确认答案正确性的一种措施

"培养学生能从各个不同角度迅速判断命题的真伪和检验题目的答案是教师在数学过程中必须时常注意的一个重要环节．"[1]常用的数学习题的检验法有

(一) **估值法**　通过对问题的实际意义估值，或通过心算估值，常常可以发现一些错误的答案．

【例 27】　求和圆的内接正三角形一边等长的弧的度数．

解：所求的弧为

[1] 杨象富《中学数学检验法》，《国内外中学数学》第 1 卷第 2 期．

$$\frac{2\sin 60^\circ \cdot R}{2R}\text{弧度}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{弧度}\approx 0.8660\text{弧度}\approx 49.62^\circ.$$

通过估值可知和圆的内接正三角形一边等长的弧的度数，应略小于圆的内接正三角形一边所对的圆心角的度数，即略小于120°，因此答案有误，实际上所列算式中分母应为R，得正确答案99.24°.

又如求$\operatorname{ctg}50^\circ$的值，得1.1918(实际上这是$\operatorname{tg}50^\circ$的值)，考虑到$\operatorname{ctg}50^\circ<\operatorname{ctg}45^\circ=1$，就可发现错误；计算$355^2$，得12625(中间丢失了一个零)，如考虑到$355^2>300^2=90000$，立即发现错误.

（二）量纲法　在一次报告中，华罗庚曾经提到："有人称猪的体重，试图用猪的身长乘腰围，再乘一个常数，而常数用统计方法来确定，这显然是错误的，因为量纲不对，故这样的经验公式是不可能成立的."量纲就是指某种事物或动作的单位，数学习题中如果所涉及的事物或动作的单位不对，就表明其中存在着某种错误. 如将三角形面积误记为$S=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}$(a, b, c分别表示三角形的三边，p表示三角形周长之半)；将球缺体积误记为$V=\frac{1}{3}\pi h(3R-h)$(R表示球的半径，h表示球缺的高)，通过量纲的检查，就可发现它们都是错误的.

（三）逆向运算法　加法运算的结果用减法来检验，减法运算的结果用加法来检验. 类似地，乘法和除法，乘方与开方，微分与积分，也都可以这样做.

【例 28】　计算　$\dfrac{69-7\sqrt{15}+(\sqrt{3}-6\sqrt{5})i}{3-(\sqrt{3}-3\sqrt{5})i}$.

学生得出四种不同的结果:

(1)$2-(\sqrt{3}-4\sqrt{5})i$;　　(2)$2+(\sqrt{3}-4\sqrt{5})i$;

(3)$2-(\sqrt{3}+4\sqrt{5})i$;　　(4)$2+(\sqrt{3}+4\sqrt{5})i$.

可以将所得结果分别与$3-(\sqrt{3}-3\sqrt{5})i$相乘，发现(1)，(3)，(4)都是错误的．

（四）对称法　利用题目中的条件、图形、式子的对称性，考虑结论是否符合对称性的要求．

【例 29】　已知$\triangle ABC$满足条件$a\cos A+b\cos B=c\cos C$，试判断$\triangle ABC$的形状．

若有学生得出结论：$\triangle ABC$是以b为斜边的直角三角形．由于题目的条件中关于$(a,\ A)$，$(b,\ B)$是对称的，而上述结论并不满足这样的对称关系，所以必定有误：或者是结论不完整，或者得到的根本不是应取结果．实际上，错误的性质属于前者，正确而完善的结论应是：$\triangle ABC$是以b为斜边的直角三角形，或者是以a为斜边的直角三角形．

（五）特例法　如果要说明一个判断为假，只要指出这个判断成立的某个必要条件不具备即可．特例法就是从这一思想出发，用适合题意的某个特殊数值或特殊图形来检验答案正确性的一种方法．

【例 30】　已知$1\leqslant x\leqslant 5$，化简：

$$\sqrt{(2x-1)^2}+|5-x|-x.$$

若学生求得的结果为$6-2x$，可设$x=4$，得原式的值为4，而$6-2x=6-2\times 4=-2$，所以$6-2x$不是正确的答案．

【例 31】　已知P，Q为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上两点，且有$\angle POQ=90^\circ$，求$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}$之值．

学生得出三种结果：

(1) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b^2}$；(2) $\frac{a^2+b^2}{ab}$；(3) $\frac{1}{ab}$.

关于(1)，我们可从结果不具有条件中关于a，b的对称性，加以否定；关于(2)，从量纲来看，$\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}$是长度单位的$-2$次幂，

而$\frac{a^2+b^2}{ab^2}$则是长度单位的 0 次幂，所以可以否定；关于(3)，用特例法，设 P,Q 两点其中有一点在纵轴上，另一点在横轴上，此时得 $\frac{1}{OP^2}+\frac{1}{OQ^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$，因此也可以否定.

（六）多解对照法　对于一个数学习题，我们运用多种方法求出其结果，如果所得的结果都一致，就增加了结果正确性的可靠程度；如果所得的结果不一致(指实质而非形式上的不一致)就说明其中至少存在着错误.

【例 32】 某班级共有 40 名学生，其中有正、副班长各 1 名，现在选出 4 人为代表，要求代表中至少包括 1 名班长，问有多少种选法？

解一：4 名代表中包括正班长而不包括副班长的选法有 C_{38}^3 种，包括副班长而不包括正班长的选法有 C_{38}^3 种，包括正、副班长的选法有 C_{38}^2 种，根据加法原理，得所求选法为

$$C_{38}^3+C_{38}^3+C_{38}^2=8436+8436+702=17575(\text{种}).$$

解二：4 名代表中包括正班长的选法有 C_{39}^3 种，包括副班长的选法有 C_{39}^3 种，根据加法原理，得所求选法为

$$C_{39}^3+C_{39}^3=9139+9139=18278(\text{种}).$$

解三：40 名学生中任选 4 名为代表，选法为 C_{40}^4 种，这 4 名代表之中无 1 名为班长的选法有 C_{38}^4 种，于是得所求选法为

$$C_{40}^4-C_{38}^4=91390-73815=17575(\text{种}).$$

以上三种解法所得的结果不完全相同，其中解一和解三的结果相同，且均较解二的结果为小. 于是首先可肯定其中至少有一种解法是错误的. 是解一和解三在计算上有遗漏呢？解二在计算上有重复？还是三种解法都属错误？事实上经过仔细考虑，可发现解二在计算上有重复，即两名班长都在内的选法计算了两次，所以按照原来的思路，应在此基础上减去重复计算的部分，得

$$C_{39}^3+C_{39}^2-C_{38}^2=18278-703=17575\ (\text{种}).$$

这一结果与解一、解三完全一致，更加强化了解一和解三的正确性.

以上(一)至(六)各种检验方法，用于错误解答的否定是完全有效的，但用于解答的正确性的肯定一般只能增加其可信程度.

二、作为解题过程的必不可少的步骤

检验，作为解题过程的必不可少的步骤，主要在下列两类问题中产生：

(1) 某些实际应用问题和论域有限制的问题. 在这些问题的解题过程中，由于未能顾及原来问题的实际意义或论域的限制，可能引进一些不适当的解答，必须通过检验来决定解答的取舍.

(2) 在某些方程(如分式方程、无理方程、对数方程、三角方程等)、不等式(如分式不等式、无理不等式、对数不等式、三角不等式等)和计算题的解题过程中，由于难以保持变换的等价性(对方程和不等式来说即保持它们的同解性)，这种情况如表现为以命题的必要条件代替原命题，就可能导致解集的扩大，因此必须通过检验，以便舍去那些不适合的解答.

【例 33】 一个容器盛满了纯酒精. 先倒出 8 升，然后加满水，再倒出 5 升，再加满水，这时容器内酒精和水之比为 9:11，求容器之容积.

解 设容器的容积为 x 升，依题意列出方程：

$$\frac{x-8}{x}\cdot\frac{x-5}{x}=\frac{9}{11+9},\qquad ①$$

化去分母并整理，得

$$11x^2-260x+800=0.\qquad ②$$

解得 $$x_1=20,\ x_2=3\frac{7}{11}.$$

检验：

1．x_1，x_2 都满足方程 ①；

2．由题意，容器中先倒出 8 升酒精．因此应满足条件 $x\geqslant 8$，从而舍去 x_2，取 $x=20$(升)．

上述检验过程中，步骤 1 是考虑到方程 ② 与方程 ① 未必同解，即考虑到命题 ② 是命题 ① 的必要条件，因此 ① 的解集可能扩大；步骤 2 是考虑到将解原应用题归结为解方程 ①，忽略了原题中 $x\geqslant 8$ 的条件的限制．

【例 31】 过原点 O 作圆 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的任意割线交圆于 P_1，P_2，求弦 P_1P_2 的中点的轨迹．

解：如图 6-16，$C(1,\ 2)$是已知圆的圆心，设 P_1P_2 的中点为 $P(x,\ y)$，在 $\mathrm{Rt}\triangle CPO$ 中有 $CP^2+OP^2=OC^2$，于是得

$$(x-1)^2+(y-2)^2+x^2+y^2=5,$$

即
$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}. \qquad ①$$

故所求的轨迹是以点$\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$为圆心，$\frac{\sqrt{5}}{2}$为半径的圆．

检验：由题意，所求轨迹必须满足

$$(x-1)^2+(y-2)^2<1, \qquad ②$$

由 ①，②，得$x+2y>4$． ③

因为 $x+2y=4$ 与已知圆$(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 的交点为$(0,\ 2)$，$\left(\frac{8}{5},\frac{6}{5}\right)$，所以在 ② 的约束条件下，所求轨迹方程是$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4}\left(0<x<\frac{8}{5}\right)$．所求轨迹是以点$\left(\frac{1}{2},1\right)$为圆心，$\frac{\sqrt{5}}{2}$为半径的圆在已知圆内部的一段弧(不含两个端点)．

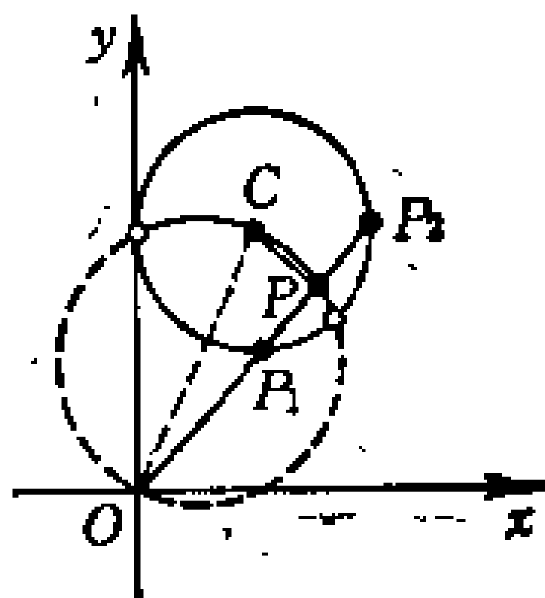


图 6-16

上述检验过程是考虑到方程 ① 只是 P 点的轨迹所应满足的必要条件，而未必是充分条件，就轨迹来说，方程 ① 的曲线是完备的，但未必是纯粹的，这一点从直观上是容易理解的.

【例 35】 解关于 x 的方程

$$\lg(ax-1)=\lg(x-3)+1. \qquad ①$$

解：由原方程得

$$ax-1=10(x-3), \qquad ②$$

即

$$(10-a)x=29,$$

此方程当 $a=10$ 时无解，$a\neq10$ 时有唯一解 $x=\frac{29}{10-a}$. 所以原方程当 $a=10$ 时无解，当 $a\neq10$ 时有唯一解 $x=\frac{29}{10-a}$.

检验：将所得的根代入原方程，欲使式子有意义，还必须满足：

$$\begin{cases}\dfrac{29}{10-a}-3>0;\\[2mm] \dfrac{29a}{10-a}-1>0.\end{cases}$$

解之，得 $\frac{1}{3}<a<10$. 故当 $\frac{1}{3}<a<10$ 时，原方程的解是 $x=\frac{29}{10-a}$；当 $a\leqslant\frac{1}{3}$ 或 $a\geqslant10$ 时，原方程无解.

上述检验过程是考虑到命题 ② 是命题 ① 的必要条件，而未必是充分条件，即由 ① 到 ② 未必保持方程的同解性.

【例 36】 已知 $0<x<\pi$，且 $\sin x+\cos x=\frac{7}{13}$，求 $\operatorname{tg}x$.

解： 设 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$，则

$$\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{7}{13}. \qquad ①$$

即

$$10t^2-13t-3=0,$$

解之，得

$$t_1=\frac{3}{2},\ t_2=-\frac{1}{5}.$$

代入 $\operatorname{tg} x=\frac{2t}{1-t^2}$，得 $\operatorname{tg} x=-\frac{12}{5}$，$-\frac{5}{12}$.

检验：t_1，t_2 都满足方程(1)，但由已知 $0<x<\pi$，所以 $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{2}$，$t>0$，因此 t_2 应舍去，由 $t_1=\frac{3}{2}$，得 $\operatorname{tg} x=-\frac{12}{5}$.

以上四个例题中，例 33,34 是由于在解题过程中未能顾及原来问题的实际意义的限制，例 35，36 则是由于在解题过程中未能保持变换的等价性，因而"检验"就成为这些题目解题过程的必不可少的步骤．当然，在这些题目的解题过程中，如能始终保持与原来问题的意义的一致性和变换的等价性，则"检验"这一步骤当然可以略去．如对于例 35，一开始就考虑混合组：

$$\begin{cases} ax-1=10(x-3); \\ x-3>0; \\ ax-1>0. \end{cases}$$

则"检验"这一步骤就可略去.

在中学数学教学中，对于解分式方程、无理方程、对数方程、三角方程和解分式不等式、无理不等式、对数不等式、三角不等式等问题，为了避免引进增根，实际上有两种处理方法：(1)如目前大多数教师所做的那样，在解题过程中设置"检验"这一步骤；(2)在解题过程中每一步都保持同解性．解方程或解不等式过程中，产生失根现象的原因是由于未能保持其同解性，根源在于以充分而非必要条件代替原命题，这种情况必须在解题过程中予以防止，因为这种失根并非通过"检验"能够解决，关于这一点，已在本章第二节五(一)中叙述过。

第七章　数学选择题

选择题是近几十年发展起来的一种题型，它的特点是，题目中已给出答案，答题者只要从若干备选答案中选出其正确的，勿需由答题者自行构建．正因为选择题具有答案现成确定性这一特点，所以在评卷过程中可以消除评卷者主观见解和经验不同而导致成绩的偏差，被称为是一种客观性题型．在教育测量现代化、科学化的发展过程中，选择题被公认是标准化考试中的一种主要题型，因而引起广大教育工作者的兴趣，受到世界各国教育界的重视．美国数学会组织的全国性的高中数学年度考试(AHSME)从1950年起，所用的考题一直全部是选择题．尽管从60年代开始，选择题的价值在美、英等国家受到了怀疑，英国某些地区的考试局甚至取消了选择题，但是到目前为止，选择题仍然是各国考试中应用最为广泛的一种题型．1979年笔者曾在《浙江教育》第12期中著文建议在我国数学科考试命题中引进选择题．1983年在我国高等学校招生考试数学科试题中首次出现了选择题，而我国各省、市、自治区中学数学竞赛联赛则早在1981年就使用了选择题．

第一节　结构和类型

数学选择题的结构由四部分组成：

1．指令性语言　通常写在总题号后面，所有小题的前面，一般包括两个内容：一是指明每个题目的备选答案中正确答案的数量；二是说明计分方法．

2．题干．是指表明考查内容的不完整的句子或问句．

3．选择支．即题干后面的备选答案．选择支至少要有三个，一般是四到五个，其中有一个或者几个是正确的．不正确的选择支叫做迷惑支，或称干扰支．

4．答．填写正确选择支的代号的空位．有时空位在题干中出现．

如"1985年上海市初中数学竞赛试题"中有：

> 一、选择题(本题满分30分，每小题6分)
>
> 本题共有5个小题，每一小题都给出了以(A)，(B)，(C)，(D)为代号的四个答案，其中只有一个答案是正确的，请将正确的答案用代号填在各小题的方括号内．答对者得6分，不答者得1分，答错者得0分．　　(1)
>
> 1．设二次方程 $x^2+px+q=0$ 的两根恰为 p，q，则 pq 的值是　　(2)
>
> (A) 0；　(B) -2；
> (C) 0或-2；　(D) 非上述答案．　　(3)
>
> 答(　)　　(4)

这里(1)是指令性语言；(2)是题干；(3)是选择支；(4)是答．

根据数学选择题的结构和答题方式，选择题具有以下优点：

(1) 有利于扩大试卷容量，提高考查知识的覆盖面，有利于克服传统题型由于数量少、抽样不足面造成的局限性，提高考试的信度．

(2) 题意清楚，要求明确，评分标准统一、客观、准确，不受评卷者主观因素的影响，有利于提高考试的信度和效度．

(3) 有利于提高评卷速度．如美国、日本等国家的由选择题组成的大型标准化考试，其评卷、统计分数、分析结果都由光电扫

描器及电脑进行．日本的国立、公立大学入学试卷200万份，仅10天就可评出结果，节省了大量的人力和物力．

(4) 有利于培养学生的分析判断能力及推理能力，提高解题速度和灵活性．

选择题也有以下缺点：

(1) 命题要有专门技巧，选择支中必须有足量的迷惑支，这些迷惑支又必须有一定的似真性，如果迷惑支出得不好，就容易产生答案的暗示性，所以编制选择题所费时间较多．

(2) 所谓"客观性"仅限于评分的形式，而不一定是学生的实际成绩，由于答案可以随机猜测，因此可能助长学生的侥幸心理．

(3) 局限于考查个别事物，难以反映知识的整体和深度．

(4) 答案唯一正确，不能反映解题的思维过程，求同而不利于发散，不利于学生创造性思维的发展．①

由于选择题存在难以反映解题的思维过程，本身又可以猜答案等缺点，因此世界上一些国家的数学竞赛，如匈牙利、波兰、罗马尼亚、苏联以及国际数学奥林匹克试题中都不采用这种题型．美国参加国家数学奥林匹克的选手虽然是通过选择题从高中数学年度考试(AHSME)中遴选出来的，但是在决赛中也全部不采用选择题，而采用难度较大的传统题型的试题．

关于数学选择题的分类，由于标准的不同，存在着多种的分类方法．下面我们按确定正确选择支的要求和方式将数学选择题分为四种类型．

(一) 单一型　选择支中有且仅有一项是正确答案，这种题目称为单一型选择题．单一型选择题是目前最常见、流行最广泛的

① 国内学者对此具有不同见解，如张乃达、徐适在《数学选择题与创造性思维能力的培养》(《中学数学教学》1985年第1期)一文中认为：数学选择题"对培养学生创造性思维能力具有独特的作用"．

题型.

【例 1】 已知 x_1, x_2 是方程

$$x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0 (k\in R)$$

的两个实数根，则 $x_1^2+x_2^2$ 的最大值是（ ）。

(A) 19;　　　(B) 18;

(C) $5\frac{5}{9}$;　　　(D)不存在.

(答：(B))

（二）多解型　选择支中可以有多项是正确答案，这种题目称为多解型选择题. 解答这种类型的题目，需要考虑每个选择支都有被选的可能(当然结论互相排斥的选择支不可能同时被选)，所以一般具有较大的难度，并且答案被猜中的概率很小.

【例 2】 已知 a,b,c 都是复数，则 a, b, c 都相等可表为（ ）.

(A) $a-b=b-c=c-a$;

(B) $ab=bc=ca$;

(C) $a+b=b+c=c+a$;

(D) $(a-b)^2=(b-c)^2=(c-a)^2$.

(答：(A), (C))

（三）组合型　由几个选择支才能组成正确答案，这种题目称为组合型选择题.

【例 3】 方程 $x^2+Bxy+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示一个与 x 轴相切于坐标原点的圆的充要条件是（ ）.

(A) $B=0$;　(B) $D=0$;　(C) $E=0$;　(D) $F=0$;

(E) $B\neq0$;　(F) $D\neq0$;　(G) $E\neq0$;　(H) $F\neq0$.

(答：(A), (B), (D), (G))

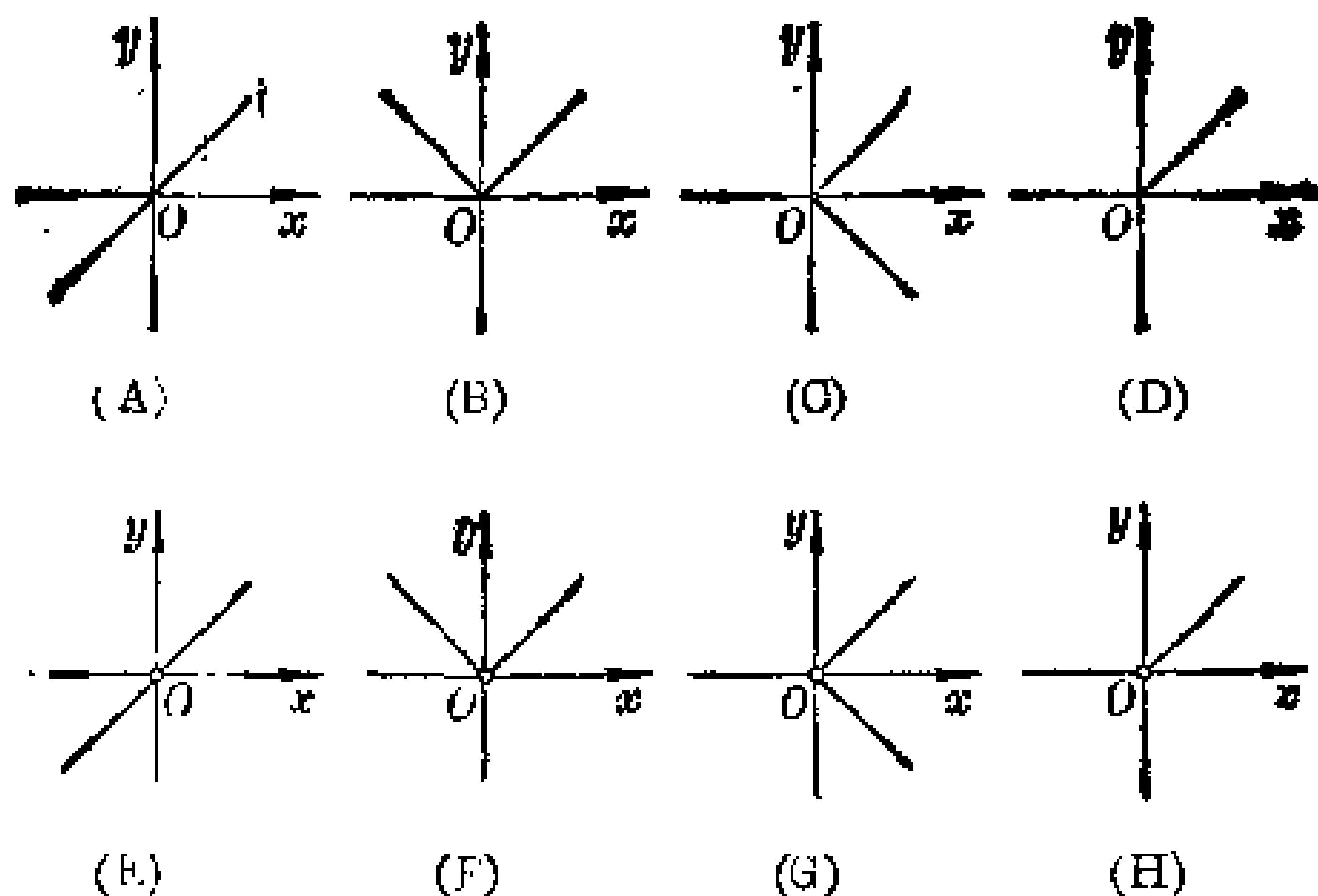
（四）配伍型　题干中包含若干个对象，要求这些对象与选择支作正确搭配，这种题目称为配伍型选择题. 配伍型选择题题干

中所包含的对象个数可以与选择支的个数相等，也可以不等，在搭配过程中，每个选择支可以重复使用。

【例 4】 已知函数

$$y_1=(\sqrt{x})^2; \qquad y_2=\sqrt{x^2};$$
$$y_3=\sqrt{\frac{x^3}{x}}; \qquad y_4=\frac{x^2}{x}.$$

及图像



则函数与图像的正确对应是

y_1—( )； y_2—( )； y_3—( )； y_4—( ).

(答：y_1—(D)；y_2—(B)；y_3—(F)；y_4—(E).)

以上四种类型选择题，后三种类型都可以转化为单一型选择题。如例 2，例 3，例 4 可分别转化为下列单一型题目：

【例 2′】 已知 a, b, c 都是复数，考虑：

(1) $a-b=b-c=c-a$; (2) $ab=bc=ca$;

(3) $a+b=b+c=c+a$; (4) $(a-b)^2=(b-c)^2=(c-a)^2$.

则 a, b, c 都相等可表为( ).

(A) (2), (3); (B) (1), (4);

(C) (1), (3); (D) (3), (4). (答：(C))

【例 3′】 已知方程 $x^2+Bxy+y^2+Dx+Ey+F=0$.
考虑:

(1) $B=0$; (2) $D=0$; (3) $E=0$; (4) $F=0$;

(5) $B\neq0$; (6) $D\neq0$; (7) $E\neq0$; (8) $F\neq0$.

则方程表示一个与 x 轴相切于坐标原点的圆的充要条件是( ).

(A) (1),(2),(3),(8); (B) (1),(2),(4),(7);

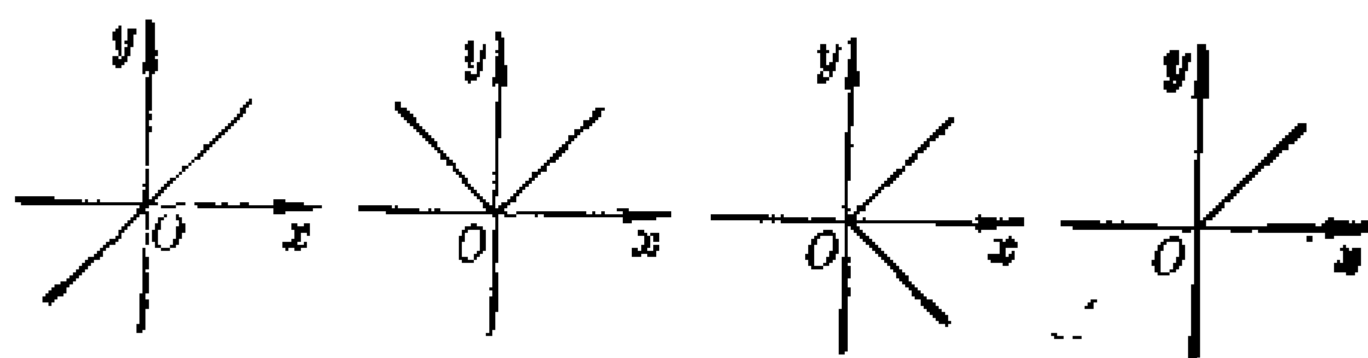
(C) (1),(2),(8); (D) (1),(2),(7).

(答: (B))

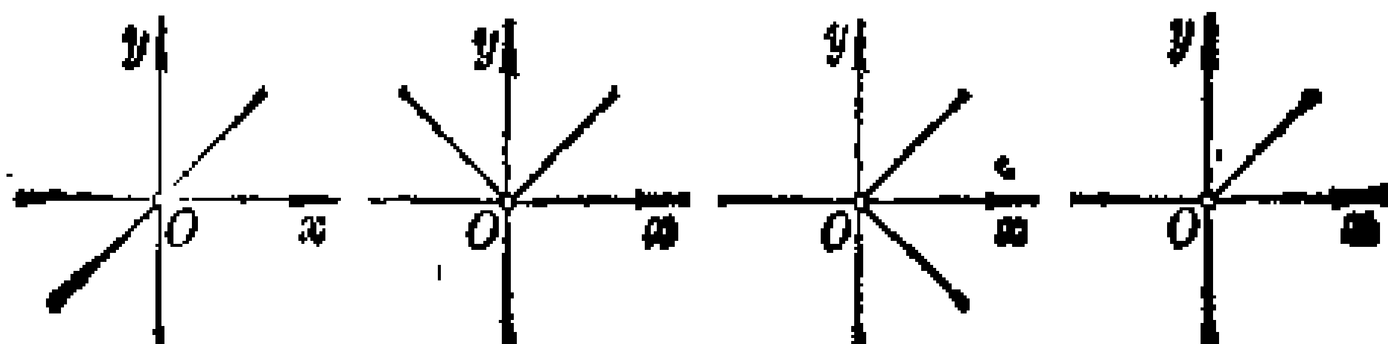
【例 4′】 已知函数

$$y_1=(\sqrt{x})^2;\quad y_2=\sqrt{x^2};$$
$$y_3=\sqrt{\frac{x^3}{x}};\quad y_4=\frac{x^2}{x}.$$

及图像



(1) (2) (3) (4)



(5) (6) (7) (8)

则函数与图像的正确对应关系是( ).

(A) y_1—(3); y_2—(6); y_3—(4); y_4—(1).

(B) y_1—(8); y_2—(2); y_3—(6); y_4—(1).

(C) y_1—(7); y_2—(4); y_3—(8); y_4—(5).

(D) y_1—(4)； y_2—(2)； y_3—(6)； y_4—(5)．

(答：(D))

关于数学选择题的类型，学术界存在的一个重大争议是：该不该承认所谓"最佳型"的数学选择题．什么是最佳型选择题？按某市教育科学研究所编写的一份资料的解释是，此种题目的基本模式是在每个问题下有四、五个可供选择的答案，其中仅有一个是最佳的，即最符合题意的答案．下面是"1981 年二十五省、市、自治区数学竞赛"试题中的一道选择题：

设 $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$，$(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$

则
$$T=\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}.$$

(A) T 取负值；　(B) T 取非负值；

(C) T 取正值；　(D) T 取值可正可负．

此题有关答案的说明是：因为 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$，$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$，所以 $\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{ctg}\alpha$ 均存在，且 $\sin\alpha$，$\cos\alpha$ 无一为零，亦无一为 -1．

$$T=\frac{\sin^2\alpha\cos\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

因为 $\sin^2\alpha>0$，$\cos^2\alpha>0$，$1+\cos\alpha>0$，$1+\sin\alpha>0$．所以 $T>0$，选(C)．

现在的问题是既然"T 取正值"是正确答案，那么"T 取非负值"不也是正确答案吗？难道"正值"不是"非负值"吗？这样一来，此题就有两个选择支是正确的了，这当然违背了命题者的原意，按原意，因为集合 $\{T|T>0\}$ 是集合 $\{T|T\geqslant0\}$ 的真子集，所以(C)是比(B)"更佳"的答案，所以应该选(C)，如果有的考生选(B)，应评为错答．

再举某校一试题为例．

两条对角线相等、互相平分且垂直的四边形是

(A) 平行四边形；　(B) 矩形；

(C) 菱形；　　　　(D) 正方形.

此题按命题者的要求是选(D)，但实际上(A)，(B)，(C)，(D)每一个都可以考虑，所以该命题的出法欠妥.

笔者认为选择题的题干是一个不完整的句子或问句，它和选择支搭配就构成一个判断，也就是命题. 在数学中，我们关心的是命题的真假值，也就是判断是否成立的问题. 真命题就是正确的，而假命题则是错误的，至于真命题中何者"最佳"，何者"稍逊"，这是一个相当模糊的问题，并不是我们所关心的. 实际上我们也很难订出一个统一的衡量标准. 比如说，能否以精确度来衡量呢？根据印度的数学天才拉玛努扬(S. Ramanujan)的构思，现已有人用电脑将圆周率 π 的值算到第 1750 万位，这当然有一个非常精确的数值，但是在实际计算中把它直接搬来使用，无疑是不可思议的事. 某人回答别人对他的出生时间的询问，对招工站来说只要回答 1971 年就可，对兵役站来说"最佳"的回答是 1971 年 6 月，过于粗略当然不好，过于精确也无必要. 如果此人涉及一桩发生于 1989 年 6 月19日的刑事案，在法庭上他应陈述出生于 1971 年6 月 20 日，以便确定他是一个"未成年人". 所以，精确与否并不能作为"佳"与"不佳"的标准.

我们注意到，不少论者都认为在单一选取选择支的指令下，要求在若干个本属正确的选择支中确定一个"最佳"的结果来，这不仅是困难的，而且本身已经违背了指令性语言的要求，说明这个题目是不正确的，如王保礼就在文[1]中指出"在一些选择题的题首，说明了在每组供选择的答案中，只有一个答案是正确的. 这时当然就不能允许有多个正确的被选支并存在一题的现象."在实际解题

[1] 王保礼《关于编制数学选择题的一些认识》，《数学通报》1985年第 7 期.

过程中，如前例，由"(C)T取正值"正确立即导致"(B)T取非负值"正确，因为不可能有两个正确的答案，所以必然认为(C)是错误的，首先将(C)排除，这样一来，应试者所选的答案又与命题者的意图相左，不可避免地会产生混乱和评分的困难，所以我们的结论是，所谓"最佳型"数学选择题在理论上是难以成立的，在实践上是有害的。

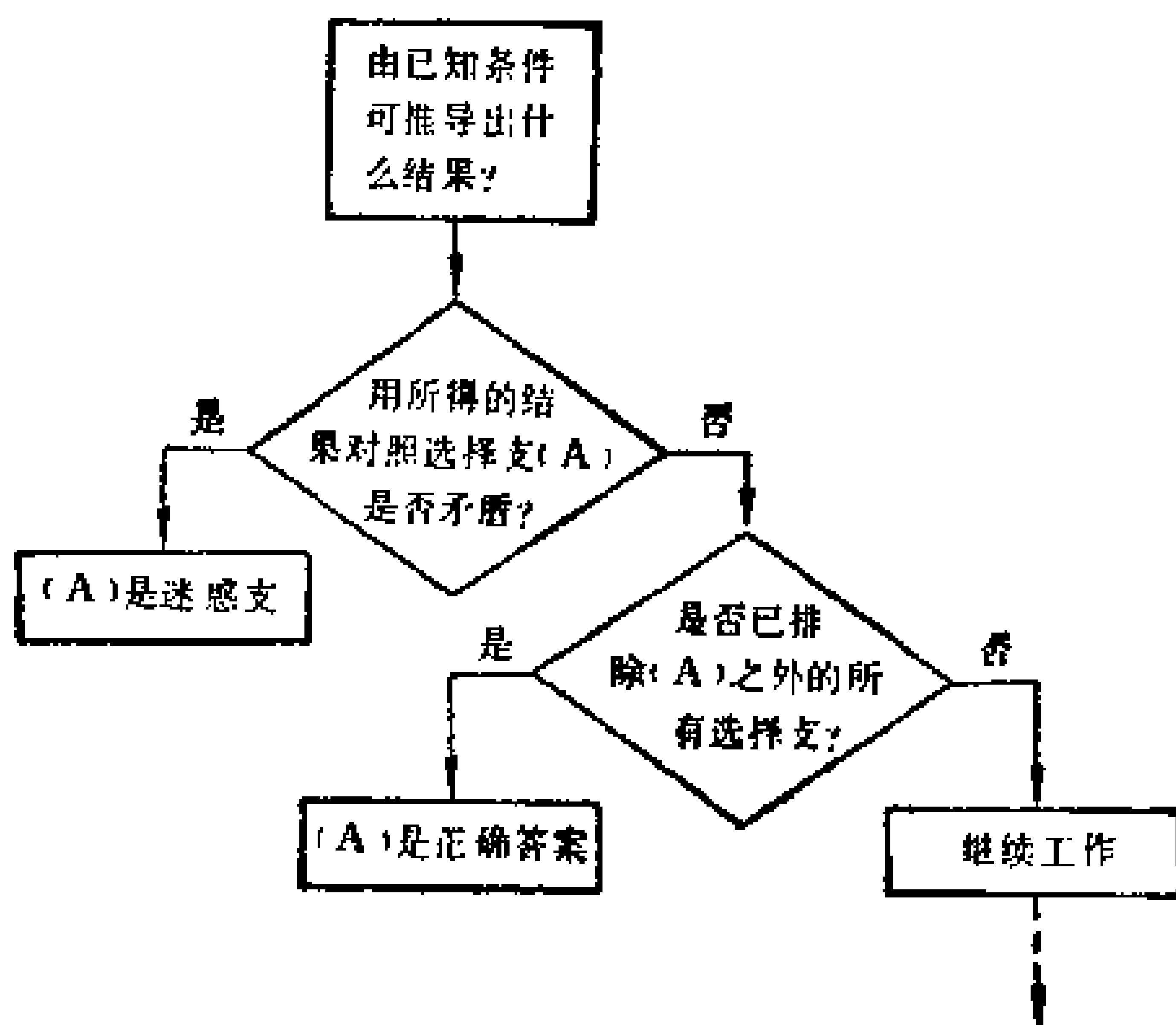
第二节　解　　法

如上节所述，数学选择题中最常见的是单一型选择题，而且其他类型的选择题都可以转化为单一型选择题，所以在本节中我们着重研究单一型数学选择题的解法，并约定所举各例都是单一型的。

有些学者和教师认为，解数学选择题都应该采用直接法，即从题干中所给出的条件出发，根据定义、定理、法则，进行直接计算、证明、判断，得出结论，然后与各选择支对照，选出其中正确的答案。其实这是一种不正确的观念，因为单一型数学选择题受指令性语言"有且只有一个答案是正确"的约束，所以往往可以用间接法来解，即在k个选择支中，如能判断其中$(k-1)$个选择支是错误的，那么剩余的1个，虽然我们没有直接去研究它，但是由于其余各选择支已全部被排除，从而就间接地肯定了剩余的1个是正确答案。从某种意义上说，间接法正是体现了单一型选择题所具有的特点，因而是一种更重要的、更优越的解题方法。间接法又称为排除法，其中又可以分为：

（一）概念排除法　由已知条件推导出某些结果，运用这些结果并结合已知概念和真命题排除迷惑支。

概念排除法的模式是



【例5】 已知一个正数 M 的倒数 $\frac{1}{M}$ 的常用对数的首数为 a，尾数为 $b(b\neq0)$，则 M 的常用对数的(　)。

(A) 首数是 $-a$，尾数是 $-1-b$；

(B) 首数是 $-a-1$，尾数是 $-b$；

(C) 首数是 $\frac{1}{a}$，尾数是 $\frac{1}{b}$；

(D) 首数是 $-a-1$，尾数是 $1-b$.

解：根据常用对数的性质："常用对数的尾数是小于1的非负数，"而由已知 $b\neq0$，可得

$$-b<0,$$

这就排除了(B)；

还可得

$$-1-b<0,$$

这就排除了(A)；

又由 $$\frac{1}{b}>1,$$
可排除(C).

所以本题应选(D).

【例 6】 已知周长为有理数的等腰三角形其底边上的高等于底边之半(图 7-1),那么( ).

(A) 腰和底边上的高都是无理数;

(B) 腰和底边上的高都是有理数;

(C) 腰是有理数,底边上的高是无理数;

(D) 腰是无理数,底边上的高是有理数.

解:由已知等腰三角形的底边上的高等于底边之半,所以这是一个等腰直角三角形.

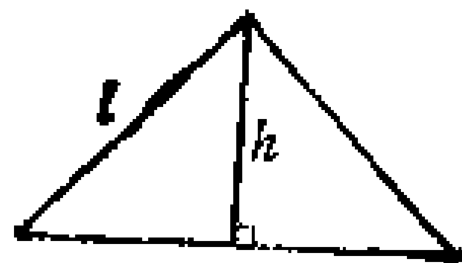


图 7-1

设此三角形的腰为 l,底边上的高为 h,则底边为 $2h$. 由

$$\text{周长}=2l+2h=2(l+h)=\text{有理数},$$

得 $$l+h=\text{有理数}.$$

因为"两个有理数之差为有理数",所以当 l, h 中之一为有理数时,另一个便不可能为无理数,这就排除了(C),(D).

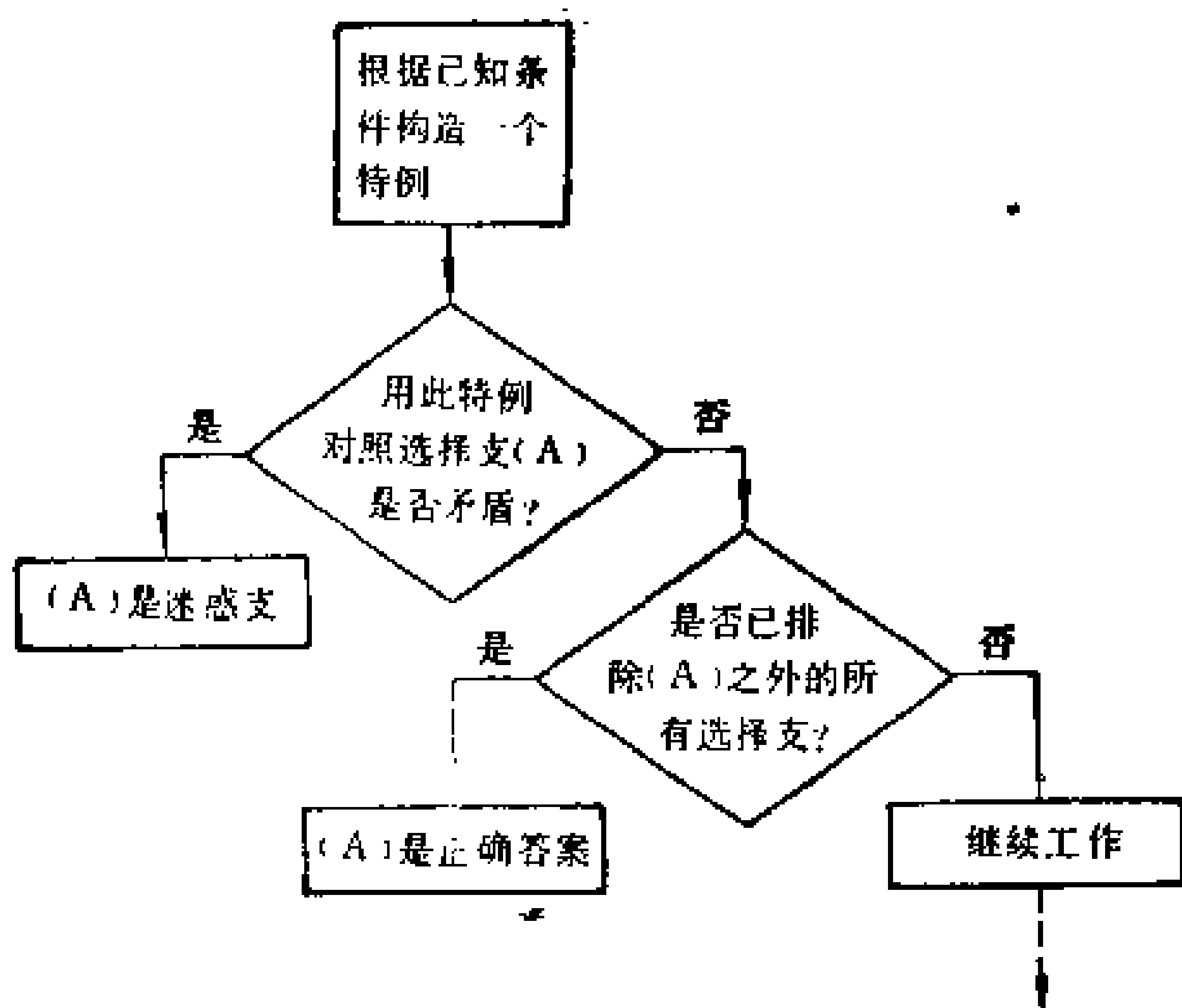
又因为"两个有理数之比为有理数",而 $l:h=\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ 是无理数,所以 l, h 不可能都是有理数,于是又排除了(B).

所以本题应选(A).

(二) 特例排除法 构造符合已知条件的特殊例子,如特殊图形、特殊的数量关系等,排除迷惑支.

特例排除法的逻辑依据是,对于一个全称肯定判断"所有 s 是 p",我们只要举出一个反例"有一个 s 不是 p",就可断定上述命题为假.

特例排除法的模式是



特例排除法是排除法中最常用的一种方法，它具有简练、快捷的优点. 如例6，用特例排除法的思路，我们只要构造出一个满足已知条件的特例，即周长为有理数且底边上的高等于底边之半的三角形，如

$$h=\sqrt{2}-1,\ l=2-\sqrt{2},$$

这里的 h, l 都是无理数，而周长为有理数，就可排除(B)，(C)，(D)，从而选(A).

【例 7】 已知 $1<x<a$，则 $\log_a x^2$，$(\log_a x)^2$ 与 $\log_a(\log_a x)$ 的大小关系是(　).

(A) $(\log_a x)^2<\log_a x^2<\log_a(\log_a x)$;

(B) $\log_a x^2<(\log_a x)^2<\log_a(\log_a x)$;

(C) $\log_a(\log_a x)<(\log_a x)^2<\log_a x^2$;

(D) $\log_a(\log_a x)<\log_a x^2<(\log_a x)^2$.

解：取满足已知条件 $1<x<a$ 的某个 x 值，如 $x=\sqrt{a}$. 有

$$\log_a x^2=\log_a(\sqrt{a})^2=1;$$

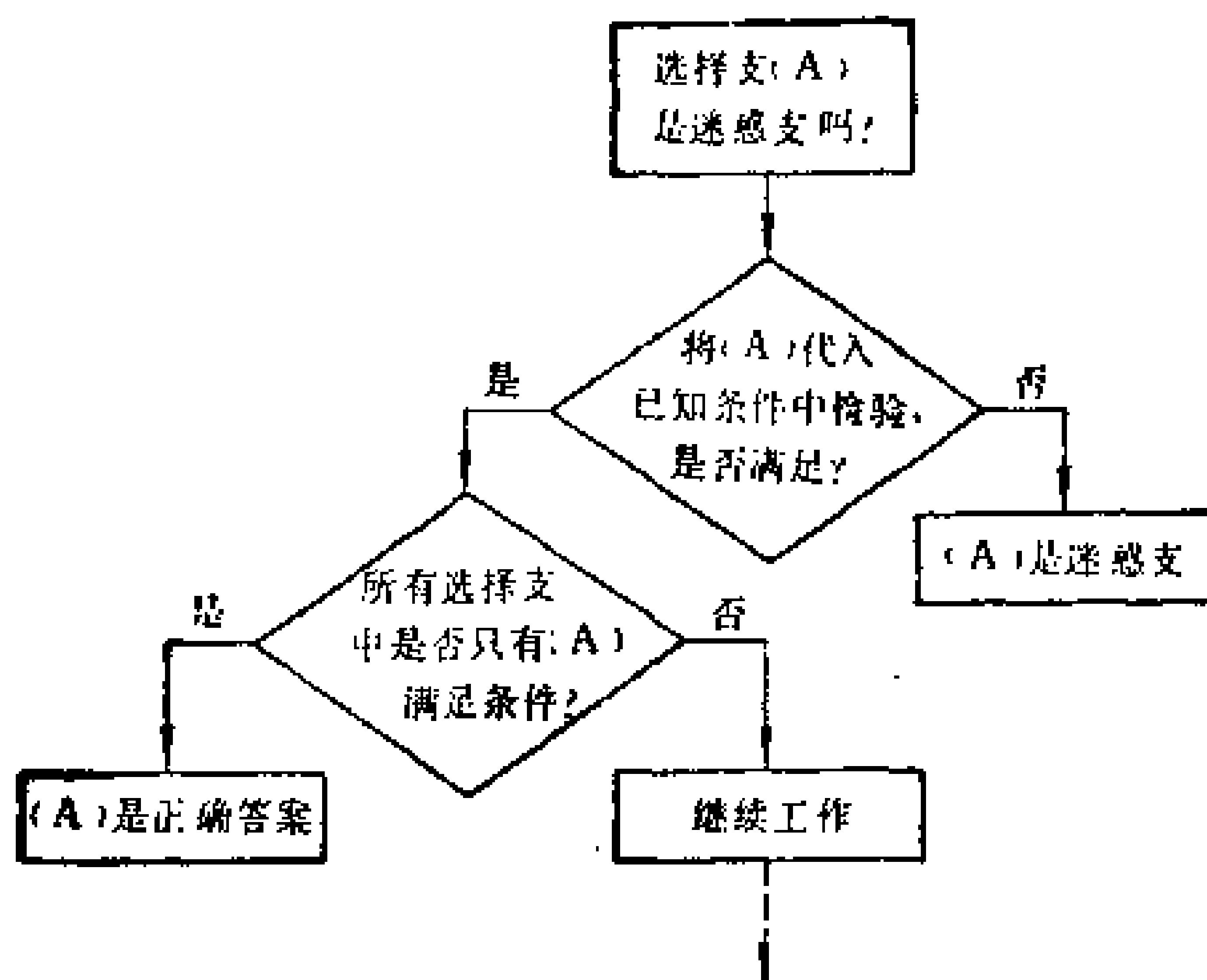
$$(\log_a x)^2=(\log_a\sqrt{a})^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4};$$

$$\log_a(\log_a x)=\log_a(\log_a\sqrt{a})=\log_a\frac{1}{2}<0.$$

于是可排除(A),(B),(D),所以选(C).

(三) *检验排除法* 将选择支代入题干所给出的已知条件,如不合,即可排除.

检验排除法与概念排除法、特例排除法的区别在于:后两者都是从已知条件出发考虑问题,而检验排除法则是从各选择支出发代入已知条件,以达到排除迷惑支的目的,其模式是



【例 8】 满足方程 $\frac{\operatorname{tg}(x-15^\circ)}{\operatorname{tg}(x+15^\circ)}=\frac{1}{3}$ 的最小正角为( ).

(A) 60°; (B) 15°; (C) 45°; (D) 30°.

解:将各选择支由小到大加以排列,依次检验.

考虑(B),代入方程左边得 $0\neq\frac{1}{3}$,应予排除;

考虑(D),代入方程左边得

$$\frac{\operatorname{tg}15^\circ}{\operatorname{tg}45^\circ}=\operatorname{tg}15^\circ=\frac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=2-\sqrt{3}\neq\frac{1}{3},$$

应予排除.

考虑(C),代入方程左边得

$$\frac{\operatorname{tg}30^\circ}{\operatorname{tg}60^\circ}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}=\text{右边}.$$

所以本题应选(C).

对于选择题的解法,我们作几点分析:

(一) 直接解法与间接解法各有其不可代替性和局限性　直接解法与间接解法是选择题的两大解法体系. 当我们审视某些具体题目, 探求它的解法时, 将会发现直接解法与间接解法都具有各自不可代替性. 就是说, 一些题目适合于直接解法, 而一般不适合间接解法; 另一些题目适合间接解法, 而不适合直接解法. 当然也有不少两种解法都适合的题目. 以上两种解法中一种解法的不可代替性,从另一方面来看,也是另一种解法的局限性. 如例1应该用直接解法. 又如:

【例9】 设函数$f(x)$在$x=0$处无意义,如果对于所有非零实数x,等式$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x^2$成立,那么适合方程$f(x)=f(-x)$的$x$值( ).

(A) 恰有一个;　(B) 恰有二个;　(C) 没有;

(D) 有无穷多个;　(E) 以上结论都不对.

对于这道题目,我们用直接法来解是很自然的想法,因为我们必须首先根据条件求出"$f(x)=f(-x)$"所表示的具体式子, 实际上,用$\frac{1}{x}$替换x, 可得$2f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{3}{x^2}$,此式与原方程联立,即

可解得 $f(x)=\frac{2}{x^2}-x^2$，这是一个偶函数，于是 $f(x)=f(-x)$ 成为恒等式，所以本题应选(D)．在这题中，间接解法是无能为力的．

但是有些题目，如例 6，它的原型是传统题："证明周长为有理数的等腰直角三角形的腰和底边上的高都是无理数．"此题是用间接证法(反证法)证明的，所以改编为选择题之后，必然不能采用直接解法．此外，由于选择题具有答案现成确定的特点，因此给编题者提供了这样的可能，即编出虽然无法运用必要的知识直接解出结果，但却可以排除其全部迷惑支的题目．

【例 10】 方程 $x^6-3x^5-2x^3-x+4=0$（ ）．

(A) 没有实数根； (B) 恰有两个相异负根；

(C) 恰有一个负根； (D) 以上结论都不对．

由于本题中给出的是一个六次方程，我们无法直接求出它的六个根，然后逐一与各选择支对照，但是却可能根据方程左边多项式的系数特点，引出方程的根所具有的某些特征，从而排除题目中的迷惑支．实际上若设 $f(x)=x^6-3x^5-2x^3-x+4$，则有

$$f(a)>0,\ (a<0); \qquad ①$$

$$f(0)=4>0; \qquad ②$$

$$f(1)=-1<0. \qquad ③$$

由 ① 知方程没有负根，从而排除(B)，(C)；由 ②，③ 知在区间 $(0,1)$ 上方程有一个根，从而排除了(A)，这样就得到了本题选(D)的结论．

（二）直接解法与间接解法要灵活运用　这里有三层意思：

(1) 对于既可以用直接解法也可以用间接解法的题目，要根据题目特点在两者之间恰当选取，在思考方向上要充分注意是否能全部或部分运用间接解法，因为间接解法一般具有更大的优越性；

(2) 对于限于用直接解法的题目，也要在诸多取向上作合理选择；

(3) 对于限于用间接解法的题目，同样要对诸多取向上进行合理选择．

【例 11】 如果凸 n 边形 $F(n\geqslant 4)$ 的所有对角线都相等，那么（ ）．

(A) $F\in$ {四边形}；

(B) $F\in$ {五边形}；

(C) $F\in$ {四边形} $\cup$ {五边形}；

(D) $F\in$ {边相等的多边形} $\cup$ {内角相等的多边形}．

(1982 年二十八省、市、自治区联合数学竞赛试题)

我们首先注意到如果(A)，(B)中有一个成立的话，(C)一定成立．因此可以排除(A)，(B)．对于(C)，实际上是可以用反证法加以证明的，方法如下：

如果 $F\notin$ {四边形} $\cup$ {五边形}，那么 F 是六边或六边以上的多边形．设 C, A, B, D为 F 的依次相邻的四个顶点，M, N 为其余顶点中的两个顶点(如图 7-2)，连结 AM, AN, BM 及 BN，因为$AM=AN=BM=BN$，所以 ABM，ABN 是有公共底边的全等等腰三角形，于是 M, N 重合，这说明除了 C, A, B, D 这四个顶点之外，多边形 F 的其余顶点都重合为一点，与假设矛盾．上面的证明过程不算简单．但是我们继续考虑用排除法，只要举出一个满足条件的 F 的特例：等腰梯形，即可将(D)排除，相比之下，在此题中排除法远较直接解法为优．

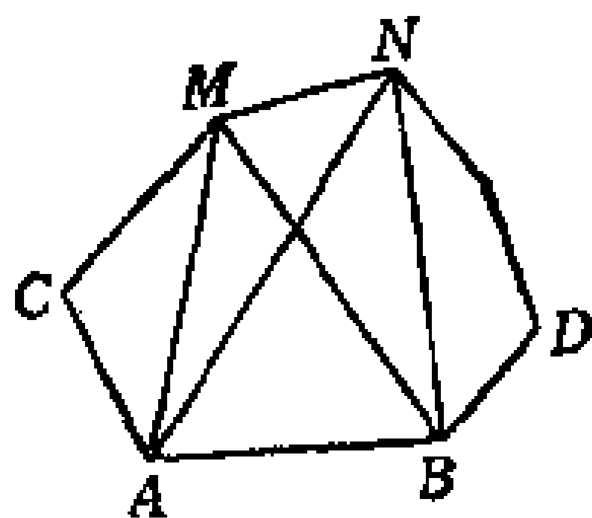


图 7-2

【例 12】 已知 $y=ax^5+x^3-ax-5$，当 $x=7$ 时，$y=7$；则当 $x=-7$时，y 等于（ ）．

(A) -7; (B) 17; (C) -17; (D) 7.

此题初学者极易想到：由已知，当 $x=7$ 时，$y=7$，求出 a，然后由 $x=-7$，求出 y。这种思路合理，但由 $a\times7^5+7^3-7a-5=7$ 求 a，毕竟相当繁琐。

如果我们从整体性考虑出发，将 ax^5-x^3-ax 看成 $f(x)$，容易发现 $f(x)$ 是一个奇函数，并且有 $f(7)=y+5=12$，所以 $f(-7)=-12$，从而得 $x=-7$ 时，$y=f(-7)-5=-12-5=-17$，于是选(C)。

以上两种思路，同是直接解法，由于思考的角度不同，优劣之别十分明显。

【例 13】 如图 7-3，$x=1$ 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴，则（ ）。

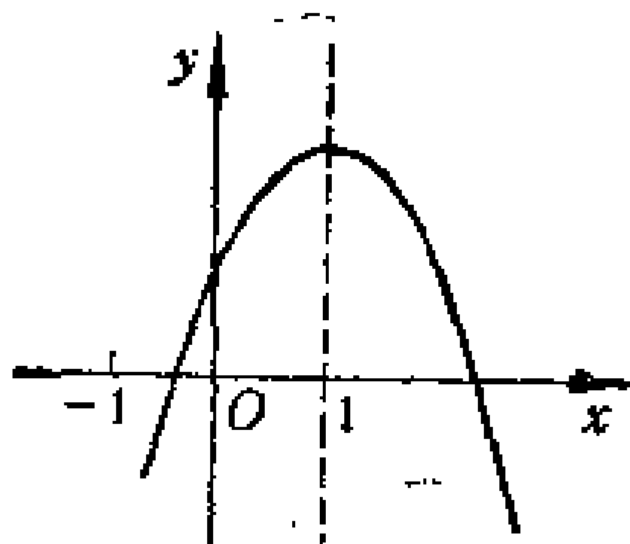


图 7-3

(A) $abc>0$;

(B) $a+b+c<0$;

(C) $b<a+c$;

(D) $2c>3b$;

(E) $c<2b$.

探求本题的解法时，极易发现：若令 $y=f(x)$，则 $f(1)=a+b+c>0$，$f(-1)=a-b+c<0$，从而排除了(B)，(C)。由于这一步的成功，使我们继续沿着排除法的思路想下去：

因为抛物线开口向下，所以 $a<0$; ①

又 $f(0)=c>0$; ②

由 $x=1$ 是抛物线的对称轴，得 $-\dfrac{b}{2a}=1$。 ③

由①，③，得 $b>0$。 ②

由①，②，④，得 $abc<0$，从而排除(A)。

由③得 $a=-\frac{b}{2}$，代入 $a-b+c<0$，得 $-\frac{3b}{2}+c<0$，即 $3b>2c$，从而排除(D)。

综上所述本题应选(E)。

以上解法，我们能在不少书中找到，但是本题用特例排除法更为简捷。我们设计一条符合图形要求的抛物线：不妨令方程 $f(x)=0$ 的一个根为 $-\frac{1}{2}$，由于图形对称关系，则另一个根为 $\frac{5}{2}$，于是抛物线为

$$y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right).$$

不妨取 $a=-4$，于是得

$$y=-4x^2+8x+5.$$

由 $a=-4$，$b=8$，$c=5$，就可将(A)，(B)，(C)，(D)全部排除，从而选(E)。

积累了以上的解题经验之后，再反思一下，本题用直接解法也是可以轻取的。因为由 $-\frac{b}{2a}=1$，$a-b+c<0$，即可得 $3b>2c$，从而 $2b>\frac{4}{3}c$，考虑到 $c>0$，这就证明了(E) $c<2b$。但是我们应该承认，由于已知条件给出的信息是很多的，而结论的取向又有五种可能，如何从已知条件中筛选出有用的信息，又如何直觉地判断结论的取向，这势必要经过信息的多次反馈，在解题者有效的监控下才能达到胜利的彼岸。

（三）对于选择支"以上结论都不对"的处理 "以上结论都不对"的选择支，由于它的正确性完全受其他选择支的制约，因此它具有特殊性质：

(1) 不可直接肯定性。它的正确性只有当其他所有选择支均被排除时才能肯定，它是不能直接被证明是正确的；

(2) 不可直接排除性。只有当其他选择支中有一个被肯定为

正确答案时才被否定，它是不能直接加以排除的.

由(1)我们得到证明选择支"以上结论都不对"为正确答案的方法：排除其他所有选择支，如例10；由(2)我们得到排除选择支"以上结论都不对"的方法：证明其他选择支中有一个为正确答案，如例9.

(四) 防止"排除法"的误用　间接解法的功能既然在于"排除"，它就不能用于"肯定"．当对各选择支依次进行"排除"，遇到有的选择支不能排除的时候，如果把"不能排除"与"肯定"等同起来，就会犯极大的错误.

【例14】 当a, b是两个不相等的正数时，下列三个代数式：

甲：　$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)$，

乙：　$\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)^2$，

丙：　$\left(\frac{a+b}{2}+\frac{2}{a+b}\right)^2$

中间，值最大的一个(　).

(A) 必定是甲；

(B) 必定是乙；

(C) 必定是丙；

(D) 一般并不确定，而与a, b的取值有关.

(1982年二十八省、市、自治区联合数学竞赛试题)

考虑用特例排除法．比如说取$a=2$, $b=1$, 此时有甲$=5$, 乙$=4\frac{1}{2}$，丙$=4\frac{25}{36}$，于是得

$$甲>丙>乙.$$

由此式可排除(B)和(C)．同时此式还说明了当$a=2$, $b=1$对"甲的值最大"，但是否由此可得(A)是正确答案的结论呢？不能！因为当a, b取某些值时甲的值最大，这只是说我们还"没有排

除(A)",并不能说已经证明了"(A)是正确答案". 实际上,我们再取 $a=3$, $b=2$, 又得甲 $=\frac{25}{3}$, 乙 $=\frac{49}{6}$, 丙 $=\frac{841}{100}$. 为了便于比较大小, 进行通分, 得甲 $=\frac{2500}{300}$, 乙 $=\frac{2450}{300}$, 丙 $=\frac{2523}{300}$, 从而有

$$丙>甲>乙.$$

由此式又排除了(A). 所以应选(D).

【例 15】 已知 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$, 且 $0\leqslant x\leqslant\pi$, 则 $\operatorname{tg} x$ 等于( ).

(A) $-\frac{4}{3}$;　(B) $-\frac{3}{4}$;　(C) $\frac{3}{4}$;　(D) $\frac{4}{3}$;

(E) 值不能完全确定.

有人采用"验证法"解本题, 即以 $\operatorname{tg} x=-\frac{4}{3}$ 为前提, 然后计算 $\sin x+\cos x$ 得 $\frac{1}{5}$, 从而就判定(A)为正确答案, 这种解法在逻辑上是有问题的. 因为在过程中只说明了"$\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$"在题设情况下是"$\operatorname{tg} x=-\frac{4}{3}$"的必要条件, 而判定(A)为正确答案, 需要说明是充分条件. 如果我们将题设中的"$\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$"改为"$\sec^2 x-\operatorname{tg}^2 x=1$"就不难看出上述解法的谬误性, 实际上这不是正确的"检验排除法".

第三节　编　　制

选择题与传统习题相比较,不同点是: 数学选择题的答案是直接给出的. 伴随正确答案还须有若干迷惑支, 所以精心设计迷惑支是编制数学选择题的关键, 迷惑支恰当与否是评价数学选择题的核心问题.

一、编制方法

(一) 直接法　根据教学目的要求进行构想，直接设计迷惑支.

如为了巩固异面直线的概念，排除对异面直线概念的可能的干扰，设计下题.

【例 16】　两条直线 a, b 是异面直线，只要满足(　).

(A) a, b 不相交;

(B) 存在平面 M, N，使 a, b 分别在平面 M, N 内;

(C) 存在平面 M，使 a 在 M 内，b 不在 M 内;

(D) 以上结论都不对.

(答: (D))

如为了进一步明确诱导公式的规律，设计下题.

【例 17】　设 $\alpha=100^\circ$，那么 $\cos(180^\circ+\alpha)$ 等于(　).

(A) $\sin\alpha$;　(B) $-\sin\alpha$;　(C) $\cos\alpha$;

(D) $-\cos\alpha$;　(E) 以上答案都不对.

(答: (D))

本题中 $\alpha=100^\circ$ 是多余条件，目的在于检验受试者思维的深刻性，如果受此多余条件的诱惑，错误地认为：既然 $\alpha=100^\circ$，则 $180^\circ+\alpha$ 是第四象限的角，选了(C) $\cos\alpha$ 或(B) $-\sin\alpha$，就说明受试者对诱导公式的记忆和理解是不深刻的.

又如为了防止对"二项式系数"和"二项展开式中某个字母的系数"产生混淆，设计下题.

【例 18】　如果 $\left(\sqrt{x}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ 展开式的第二项与第四项的二项式系数之比为 1:12，那么 n 等于(　).

(A) 5;　(B) 5 或 -2;　(C) 10;　(D) 10 或 -7.

(答(C))

(二) 改造法　改造常规的计算题、证明题、轨迹题，除了正确

答案之外，再设置几个迷惑支即可.

如计算题"求$|x-1|+|x-3|+\sqrt{4x^2+4x+1}\left(\text{其中}-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\right)$"可改造为:

【例 19】 如果

$$-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\ y=|x-1|+|x-3|+\sqrt{4x^2+4x+1},$$

那么y等于(　　).

(A) $2x+3$;　(B) 5;　(C) $-4x-3$;　(D) $4x-3$.

(答: (B))

又如证明题"设$a<0$, $-1<b<0$, 求证$ab>ab^2>a$."可改造为

【例 20】 如果$a<0$, $-1<b<0$,那么(　).

(A) $a>ab>ab^2$;　(B) $ab^2>ab>a$;

(C) $ab>ab^2>a$;　(D) $ab>a>ab^2$.

(答: (C))

(三) 深化法　研究某些问题的结论，加以挖掘、深化，区分哪些是可以引出的正确结论，哪些则是不能引出的，然后将这些结论编成选择支.

研究图 7-4，其中ABC是直角三角形，$\angle C=90°$，圆O以BC为直径，AB与圆O交于D点，过D引圆O的切线交AC于E. 我们可以得出如下结论:

(1) E是AC的中点;

(2) $\angle AED=2\angle B$;

(3) $\angle A=\angle BCD$;

(4) $DE=AE$.

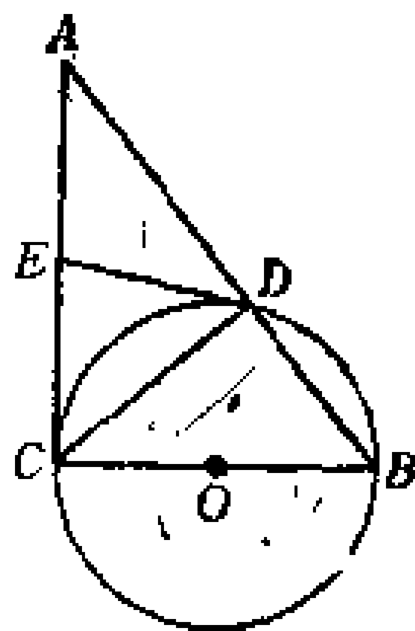


图 7-4

但不能得出DE平分$\angle ADC$，于是可编制出下题:

【例 21】 设 Rt$\triangle ABC$ 的直角边 BC 为圆 O 的直径，此圆交斜边 AB 于 D，过 D 作圆 O 的切线交 CA 于 E，则以上资料不足以证明

(A) 点 E 平分 AC；　(B) $\angle AED=2\angle B$；

(C) $\angle A=\angle BCD$；　(D) $DE=AE$；

(E) DE 平分 $\angle ADC$.

(答：(E))

又如我们研究 $\triangle ABC$ 的三边 a，b，c 成等差数列的充要条件，得出下面几种不同的形式：

(1) $2\sin B=\sin A+\sin C$；

(2) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$，$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$，$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ 成等差数列；

(3) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=3$；

(4) $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$.

于是可编制出下题：

【例 22】 在 $\triangle ABC$ 中，下面各结论与其他结论不等价的是 (　).

(A) $2\sin B=\sin A+\sin C$；

(B) $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$，$\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$，$\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$ 成等差数列；

(C) $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=3$；

(D) $a\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{A}{2}=\frac{3b}{2}$.

(答：(C))

（四）*辨析法* 搜集平时常见的错误，如概念的混淆，不考虑隐含条件，忽视特例，推理不周等，加以辨析，然后编制题目。

如搜集关于无理数的概念的错误，编出：

【例 23】 无理数是（ ）.

(A) 正方形的对角线与一边之比值；

(B) 不能用分数表示的数；

(C) 无限循环小数；

(D) 用根号表示的数.

（答：(B)）

如发现学生容易忽视椭圆上的特殊点（如顶点）到焦点的距离与该点到准线的距离之比是椭圆的离心率，不能从不同的角度去理解椭圆的离心率这一概念．可设计下题.

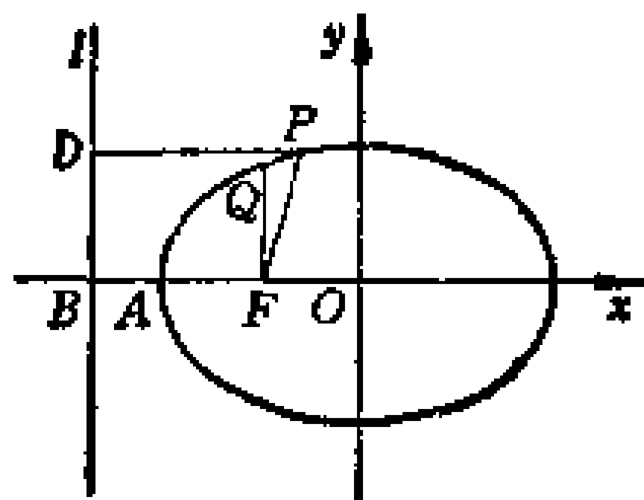


图 7-5

【例 24】 如图 7-5，已知椭圆的中心为 O，左焦点为 F，A 为顶点，准线 l 交 OA 的延长线于 B，P、Q 是椭圆上的点，且 $PD\perp l$ 于 D，$QF\perp OA$，则

(1) $\dfrac{|PF|}{|PD|}$； (2) $\dfrac{|QF|}{|BF|}$； (3) $\dfrac{|AF|}{|AB|}$；

(4) $\dfrac{|AO|}{|BO|}$； (5) $\dfrac{|FO|}{|AO|}$

这五个式子中表示椭圆离心率的式子的个数是（ ）.

(A) 2; (B) 3; (C) 4; (D) 5;

(E) 以上结论都不对.

（答：(D)）

又如解题目"关于 x 的方程 $(m^2-1)x^2+(m+1)x+1=0$ 有实数根，求 m 的取值范围．"发现两种错误答案：

(1) $\left[-1,\ \dfrac{5}{3}\right]$．其错误原因是只考虑由判别式 $\Delta\geqslant0$，而忽

略方程是不是一元二次方程；

(2) $(-1,\ 1)\cup\left(1,\ \frac{5}{3}\right]$. 其错误原因是以为当 $m=\pm1$ 时，所给的方程便不是一元二次方程，因此应予剔除．而实际上当 $m=1$时方程变为 $2x+1=0$，仍有实根．

于是编出下题．

【例 25】 如果关于 x 的方程

$$(m^2-1)x^2+(m+1)x+1=0$$

有实根，那么m的取值范围是(　)。

(A) $\left[-1,\ \frac{5}{3}\right]$；　(B) $(-1,\ 1)\cup\left(1,\ \frac{5}{3}\right]$；

(C) $\left(-1,\ \frac{5}{3}\right]$；　(D) 以上答案都不对。

(答：(C))

二、编制数学选择题的原则

(一) *科学性*　题目的题设条件必须足够，语言要准确，正确的选择支的个数应符合指令性语言的要求．当前不符合科学性原则的题目在各种书刊、考试中屡有所见，即使在全国性的高考试题和数学竞赛试题中也未能完全避免，足见问题的一斑．下面是某市 1984 年初中数学竞赛题．

【例 26】 使等式 $\sqrt{\frac{a^2c}{b^4}}=\frac{-a\sqrt{c}}{b^2}$成立的条件是(　)．

(A) $a\leqslant0,\ b\neq0,\ c\geqslant0$;

(B) $a\leqslant0,\ b\neq0,\ c=0$;

(C) a 是任何实数，$b\neq0,\ c=0$;

(D) a 是任何实数，$b\neq0,\ c=0$或$a\leqslant0,\ b\neq0,\ c>0$.

此题由于根式中的字母的取值范围课本中曾作过几次不同的

规定①；是什么"条件"呢？是充分条件，必要条件，还是充要条件？是在所给的式子已经有意义的前提下来求条件吗？这些都使人们产生分歧，莫衷一是，说明题目的科学性问题应引起我们高度重视．

（二）有效性　每个选择支都应该是有效的，都应当有被选的可能．也就是说，只有当进一步理解、分析题意，有的还要通过设值、演算、推理等步骤之后，它们之中的迷惑支才能排除．保持数学选择题的有效性原则，要注意两个问题：

(1) 不要设置即使不结合题意也能运用逻辑判断予以排除的选择支．如例10中的(A)，(B)就是这样的选择支．

(2) 不要设置与题设条件直接地、明显地相矛盾的选择支．如

【例27】　已知$abcd<0$，$a<0$，$d>0$，那么（　）．

(A) $a>0$，$b>0$，$c>0$，$d>0$；

(B) $a>0$，$b<0$，$c>0$，$d<0$；

(C) $a<0$，$b<0$，$c<0$，$d>0$；

(D) $a<0$，$b>0$，$c<0$，$d<0$．

以上选择支(A)，(B)中的"$a>0$"，(D)中的"$d<0$"直接与已知条件矛盾，该选择支自然不必考虑，于是只剩下(C)，它必然是正确答案了．未结合全部已知条件加以考虑，就选出了正确答案，这样的题目当然没有价值．

（三）似真性　每个迷惑支都能反映受试者的知识中存在某种缺陷，是编题者所设置的一个陷阱．迷惑支不应是一个随意写上去的数（或结论）．如例19，当化去$|x-1|$，$|x-3|$中的绝对值记号或$\sqrt{4x^2+4x+1}$中的根号时，如果发生符号错误，就将导致(A)，(C)或(D)这些迷惑支的选择；又如例18，当将"二项式系数"误认为"字母x的系数"时，就将导致选择(A)的错误，当题目的潜

---

① 初中代数第三册，1981年1月版第25页中规定："根式中的字母取值要使根式有意义"；1983年11月版第45页中规定："根式中的所有字母都表示正数．"

条件“n 为自然数”被忽视时，就将错误地选择(D)或(B)，所以这两个例子中的迷惑支都具有较强的似真性。

（四）灵活性　解法的灵活性是选择题的一个特点，也是选择题在培养思维的多向性、批判性方面的一个优点．除了直接解法之外，有的题目还可以用概念排除法、特例排除法、检验排除法等数学选择题所特有的方法来解，编题时应力求体现灵活性的特点．如例 6，例 13，例 20等题，它们的解法都是比较灵活的．

（五）优美性．题目的形式应力求简明、和谐及对称．（四）中所举三例，在形式上也是优美的．

第四节　可靠性和评分标准

对数学选择题的评价褒贬不一，其部分原因涉及可靠性和评分标准的合理性．本节就单一型选择题对这个问题进行分析．

一、可靠性

假定应试者对考试内容全然无知，用盲目猜答的方式，随机地取一选择支作为答案，其得分情况如何？这是研究选择题可靠性的主要关键．方法有两种：

（一）总体法　如果试卷由 n 道选择题构成，每题均有 m 个选择支，由于答题时是任意选取，因此猜对的概率是 $p=\frac{1}{m}$，猜错的概率是 $q=1-p=\frac{m-1}{m}$．若 n 道中猜对的题数为 x，则 x 呈二项分布，它的

$$均值\ \mu=np,\quad 标准差\ \sigma=\sqrt{npq}\ .$$

当 n 充分大时，可以认为服从正态分布，因而进行标准化，得 x 的标准化随机变量 $t=\frac{x-\mu}{\sigma}$，于是

$$x=\mu+t\sigma=\frac{n}{m}+t\sqrt{\frac{n(m-1)}{m^2}}$$

$$=\frac{n+t\sqrt{n(m-1)}}{m}. \quad ①$$

如1988年全国高等学校招生理科数学试卷中有15道选择题，每道题有4个选择支，取信度为5%，则由(1)式并查正态分布表，可得猜对上限为

$$\frac{15+2.33\sqrt{15(4-1)}}{4}\approx 7.7\text{(题)}.$$

若取信度为5‰，则可得猜对上限为

$$\frac{15+2.58\sqrt{15(4-1)}}{4}\approx 6.5\text{(题)}.$$

以上计算表明在该次考试中，可能有95%的应试者猜对数在7.7题以下，可能有99.5%的应试者猜对数在6.5题以下.

又当t等于定值t_0时，考察

$$y=\frac{x}{n}=\frac{n+t_0\sqrt{n(m-1)}}{mn}$$

$$=\frac{1}{m}+t_0\sqrt{\frac{1}{mn}\left(1-\frac{1}{m}\right)},$$

当m或n增大时，y减少，这说明猜对题数的上限相对降低，即当m, n较大时，选择题有较高的可靠性．而当m或n较小时，则可靠性就将降低．如$n=5$, $m=4$(1984年高考)，取信度为5%，则猜对上限增为2.8题，$y=\frac{2.8}{5}=56\%$．也就是说可能有5%的应试者得分在56%以上．这说明可靠性就不高了．

（二）个体法　就某个应试者来说，如果试卷由n道选择题构成，每题均有m个选择支，则根据二项分布公式，其答对$k(k<n)$道或k道以上的概率是

$$\sum_{i=k}^{n}P_n(i)=\sum_{i=k}^{n}C_n^i\left(\frac{1}{m}\right)^i\left(\frac{m-1}{m}\right)^{n-i}.$$

如 $n=15$, $m=4$, $k=6$, 即猜对 40% 以上题目的概率是

$$\sum_{i=6}^{15} P_{15}(i) = \sum_{i=6}^{15} C_{15}^{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{i}\left(\frac{3}{4}\right)^{15-i} \approx 0.1482.$$

如 $n=15$, $m=4$, $k=9$, 即猜对 60% 以上题目的概率是

$$\sum_{i=9}^{15} P_{15}(i) = \sum_{i=9}^{15} C_{15}^{i}\left(\frac{1}{4}\right)^{i}\left(\frac{3}{4}\right)^{15-i} \approx 0.0041.$$

以上计算表明，某个应试者参加 1988 年高考，在理科数学选择题中猜对 40% 以上题目的概率较大，达 14% 以上，但猜对 60% 以上题目的概率仅及 4‰，可以说是很小的了.

二、评分标准

一道单一型选择题有 m 个选择支，答对得 Q 分，答错得 X 分，不答得 N 分. 考虑一个随机地进行猜答的应试者，若其得分的期望值为 S，则

$$S=Q\cdot\frac{1}{m}+X\cdot\frac{m-1}{m}.$$

因为对于一个完全没有相应知识的应试者来说，他可能采取的解题对策，或者是不答，或者是随机地猜答，所以合理的评分标准应该反映该应试者无论采取何种解题对策，其所得的分数相等，也就是说合理的评分标准应满足条件 $S=N$.

在 $S=N$ 的条件下，如果 $N=0$，那么有 $X<0$，也就是说，如果不答得零分，那么答错必须扣分. 选择题采取合理的评分标准，既可防止应试者产生盲目猜答可占便宜的侥幸心理，又可解除应试者因惧怕选错而过多地失分的后顾之忧.

现在考虑比值

$$\xi=\frac{S-N}{Q}.$$

当 $\xi=0$ 时，评分标准显然是合理的；当 $\xi>0$ 时，我们称评分标准是鼓励性的；当 $\xi<0$ 时，我们称评分标准是惩罚性的. $|\xi|$ 反映评分标准的合理程度，$|\xi|$ 愈大，偏离合理的评分标准愈远. 下表列

举一些考试中选择题的评分标准及其合理程度.

序号	考试名称	题数	m	Q	X	N	S	ξ
(1)	1981年二十五省市自治区数学竞赛	7	4	5	−2	0	0.25	−0.05
(2)	1982年二十八省市自治区联合数学竞赛	8	4	6	0	1	1.50	0.08
(3)	1983年省市自治区联合数学竞赛	8	4	4	0	1	1.00	0
(4)	1984年省市自治区联合数学竞赛	8	4	5	0	1	1.25	0.05
(5)	1985年省市自治区高中联合数学竞赛	6	4	6	0	1	1.50	0.08
(6)	1986年全国高中联合数学竞赛	6	4	7	0	1	1.75	0.11
(7)	1987年全国高中联合数学竞赛	4	4	5	0	1	1.25	0.05
(8)	1988年全国高中联合数学竞赛	5	4	7	0	0	1.75	0.25
(9)	1983年全国高等学校招生数学(理科)	5	4	2	0	0	0.50	0.25
(10)	1984年全国高等学校招生数学(理科)	5	4	3	−1	0	0	0
(11)	1985年全国高等学校招生数学(理科)	5	4	3	0	0	0.75	0.25
(12)	1986年全国高等学校招生数学(理科)	10	4	3	0	0	0.75	0.25
(13)	1987年全国普通高等学校招生数学(理科)	8	4	3	0	0	0.75	0.25
(14)	1988年全国普通高等学校招生数学(理科)	15	4	3	0	0	0.75	0.25
(15)	美国高中数学年度考试(1974~1988各年)	30	5	4	−1	0	0	0

上表所列各例,(3),(10),(15)的评分标准是合理的;(1)的评分标准是惩罚性的;其余的评分标准都是鼓励性的。

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学习题理论
作者＝
页数＝２０９
ＳＳ号＝１００６８２６８
出版日期＝